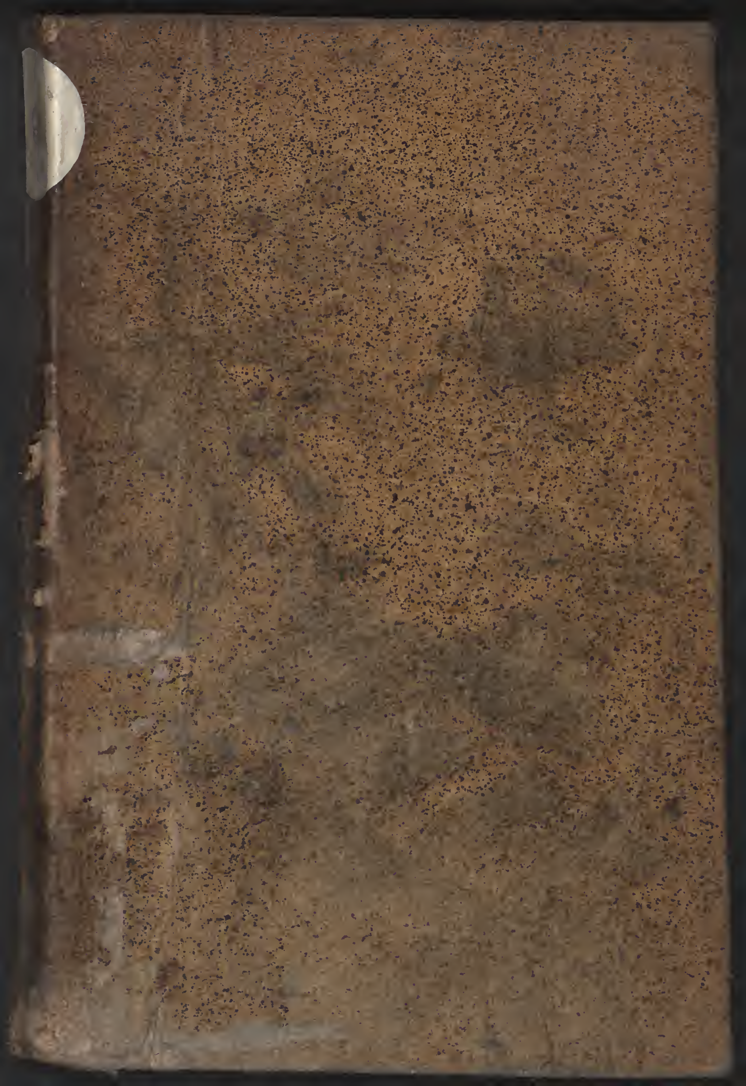
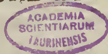



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO




Présenté par l'Auteur
À L'Académie

# DISSERTAZIONI
# D' ALGEBRA
DEL SACERDOTE
## NICOLAO COLLETTI
PROFESSORE DI FILOSOFIA.






TORINO 1787.

NELLA STAMPERIA REALE.

# PREFAZIONE.

*Il celebre P.* Clavio *nel ſuo trattato d' Algebra dice doverſi accuſare l' imbecillità dell' ingegno umano, che non poſſa comprendere il perchè* meno *moltiplicato per* meno *dia nel prodotto* più, *ſebbene ciò venga da molti eſempli confermato.*

*Io confeſſo ingenuamente la tenuità dell' ingegno mio, che, per quanti sforzi abbia fatto, non mi è riuſcito di comprendere sì fatta maniera di operare; anzi avendo conſultato ſu queſto particolare tutti gli Autori, che ho procurato di procacciarmi, ho trovato, che non erano dimoſtrazioni quelle, cui attribuivano tal nome.*

*Se a taluno ſembraſſe temerità, ed arroganza ſingolare il mettere in dubbio, e ſoggettare ad eſame principj da tanti Matematici di primo rango addottati; riſponderei in primo luogo eſſere permeſſo, anzi dovere, ſe ſi tratti di coſe dubbie, purchè ſiano alla ragione ſoggette, di eſaminarle ſecondo il detto di Lucrezio:* utere mente tua.

*In ſecondo luogo dico aver dubitato dei principj dell' Algebra l' Autore dell' articolo* Equation *del Dizionario Encycloped. il celebre* Leibnitz, *ed altri.*

*L' aſſurdità almeno delle eſpreſſioni, e l' autorità d' uomini graviſſimi mi ha ſpinto diecinove anni ſono* 1768 *a preſentare alla R. Società di Torino uno ſcritto concerniente queſta materia,*

*e posso mostrarne la ricevuta dell' Ill.*[mo] *signor Presidente: sul principio poi del* 1784 *prima che vedessi l'anonimo libro intitolato:* Exposition du calcul des quantités negatives, dans laquelle ec. *ho presentato di nuovo alla medesima R. Società (fattavi qualche mutazione, sicchè non interessasse alcuno), un simile scritto.*

*Ora ho pensato di sottomettere questo qualunque siasi mio lavoro al giudizio spregiudicato degli amatori della verità, affine di essere disingannato, se mal mi apposi, o se dico vero, diasi a conoscere, che in questo illuminato secolo non avvi quella paura, che osserva Orazio nella gente attempata di* . . . . . & quæ
Imberbes didicere, senes perdenda fateri.

*A questa prima vi aggiungo due altre dissertazioncelle, la prima delle quali mostra consenso del Calcolo differenziale col Calcolo delle quantità finite; la seconda (stata anche presentata alla medesima R. Società sul principiar del 1784) dà un metodo per determinare nelle curve la ragione delle coordinate dalla ragione della differenza delle coordinate fra di loro; ovvero dell' una, o l' altra, o di amendue insieme coll' arco corrispondente; e di questo metodo se ne dà un saggio nelle Sezioni coniche.*

| Pag. lin. | ERRORI. | CORREZIONI. |
|---|---|---|
| 8. 3. | $AB.BC$ | $AB\ BE$ |
| 9. 5. | ($n$ 4.) | ($n$ 4.)) |
| 17. 1. | quando que | quando |
| 2. | il quoziente è $-bq$ | il quoziente è $-6q$. |
| 24 | un numero negativo | un numero negativo $-a$ |
| 22 ult. | c' inganneremo | c' ingannerremmo. |
| 27. 6. | $1 \mid \overline{1-a}$ | $1 \mid \underline{1-a}$ |
| 29. 12. | al $a$ $b4$ | al $b4$ |
| 14 | aggiungerci | aggiungervi |
| | Dovunque si trova oo | $\infty$ |
| 30. 7. | $1+a$ | $1+2.$ |
| penul. | $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ ec. $=3$ | $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ ec. $=\frac{3}{2}$ |
| 37. 1. | $x^2\ px$ | $x^2+px$ |
| 47. 12. | $\frac{a}{2}+\overline{\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}}$ | $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}}$ |
| 48. 18. | del 1. d'Euclide | del 3. d'Euclide. |
| 49. 17. | segato | segata. |
| Tav. 1. Es. 1. l. ult. | $6.7.8=236$ | $6.7.8=336$. |
| Es. 2. l. 2 | $d^3+bd^2$ | $d^3+6d^2$ |
| l. 3. | $25d$ | $26d$ |
| Dif. 1. l. 4. | $p27+60$ | $27d+30$. |
| l. 8. | $6x^2\ dx^2$ | $6xdx^2$ |
| Tav. 4. dopo gli Esempj. l. 1. | $12x^2\ d^2$, $24xd^3$ | $12x^2\ dx^2$, $24xdx^3$ |
| Tav. 5. Es. 2 dif. 1. | 20,40,60 | 24, 42, 60. |
| Tav. 7. in gen. prod. l. 2. | $10nd^3\ n$ | $10nd^3$ |
| dif. 1. l. 3. | $4nd^3\ n$ | $4nd^3$ |
| l. 4. | $4nd^3\ n$ | $4nd^3$ |
| Prop. 12. l. 1. | avanti | aventi. |
| Pag. 69. l. 7. | $y=\frac{3a}{55}$ | $y=\frac{3a}{5}$ |
| 71. | $2\overline{px}\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ $px^{2}$ |
| 74. 3. | $\sqrt{5m^2-n^2}$ ec. | $\sqrt{5m^2\ n^2}$ ec. |
| 76. 4. | dell'arco ordinata | dell'ordinata. |
| 77. 10. | $16^4\ b^4$ | $16n^4\ b^4$ |
| 84. ult. | $2ax=4x^2$ | $2ax-x^2=4x^2$. |



## *Dell' uso dei segni +, e — nel calcolo delle quantità.*

1

Il segno + presso il comune degli Algebristi significa 1° *addizione*: così $a+b$ significa doversi alla quantità $a$ aggiungere la quantità $b$. 2° E' segno della semplice posizione, sicchè $a$ vale $+a$. 3° Significa la direzione, trattandosi per esempio di linee, di modochè se $a$, ovvero $+a$ significhi una linea, che da un dato punto tenda v. g. alla destra, $-a$ significherà la medesima linea, che dal dato punto tende in dirittura a sinistra, oppure se $a$, o $+a$ tende all' insù, $-a$ tende all' ingiù con direzione diametralmente opposta.

2

Il segno — 1° significa *sottrazione*, onde $a-b$ significa dalle quantità $a$ doversi sottrarre la quantità $b$. 2° E' segno di semplice negazione: così $-a$ significa una

quantità negativa, come sarebbe un debito. 3° Significa la direzione contraria alla direzione presa da prima: sicchè $-a$ significa, per esempio, una linea di direzione contraria alla direzione $+a$.

3

Il primo uso, che siasi fatto del segno — è stato per indicare la sottrazione di una quantità da un'altra omogenea. Ora da una quantità non può sottrarsi se non se ciò, che ella contiene; onde fatta la sottrazione, o ci rimane ancora qualche parte del tutto, che si voleva diminuito, oppure tutta si leva la quantità, e niente rimanvi, o sia 0.

4

Dunque le quantità negative, v. g. $-a$ sono impossibili, o immaginarie, come osservò già il celeb. *Wallis* nella sua aritmetica.

5

Per ciò, che spetta alle linee, per esempio, delle quali la direzione contraria a quella, che si era segnata col segno $+$, si nota col segno $-$, chiara cosa è questo appartenere al calcolo del sito, che tra i Matematici si annovera ancora fra le cose desiderate.

6

Sicchè ſe dobbiamo attenerci alla chiarezza, e togliere l' ambiguità, il ſegno + ſarà ſegno dell' *addizione*, ed il ſegno — della *ſottrazione*, e niente di più.

7

Dunque è un errore il dire, che nella moltiplicazione, e diviſione i medeſimi ſegni danno per prodotto, o quoziente il ſegno +, ed i ſegni contrarj danno il ſegno —.

8

In primo luogo perchè eſſendo la moltiplicazione prendere una quantità un numero dato di fiate, e la diviſione cerchi il numero delle fiate, che una quantità è contenuta in un' altra data, manifeſta coſa è, che i ſegni +, e — han nulla che fare colla moltiplicazione, e diviſione, eſſendoſi inventati queſti ſegni per indicare la ſomma da farſi, od il reſiduo da trovarſi.

9

In ſecondo luogo dico, che ſebbene ſi deſſero delle quantità negative, contro ciò che ſi è detto (4), e che i ſegni poteſſero moltiplicarſi contro il detto (8); tuttavia

$+ \times -$, o $- \times +$ non produrrebbe $-$; come dicesi comunemente dagli Algebristi, e $- \times -$ non produrrebbe $+$. Lo stesso dicasi della divisione.

In fatti l' unità sta al moltiplicatore siccome il moltiplicando al prodotto: sia $+ a$ da moltiplicarsi per $- b$ (suppongo possibile il moltiplicatore negativo), sarà pertanto $+ 1 : - b :: + a : - a b$, ovvero (poichè $- b$ è negativa, sarà anche $- 1$ unità negativa) $- 1 : - b :: + a : + a b$; sicchè il prodotto di $+ a$ per $- b$, sarebbe $- a b$, e $+ a b$; ma ripugna, che una quantità determinata moltiplicata per un' altra pure determinata dia prodotti affatto contrarj; dunque $+ \times -$, o $- \times +$ non produce $-$.

10

Molto più chiaro si dimostra essere impossibile che $- \times -$ produca $+$. Lo stesso dimostrarsi nella divisione.

Imperciocchè se $- a$, e $- b$ siano le quantità da moltiplicarsi tra di loro, l'unità sarà di necessità negativa, altrimenti le quantità non potrebbero essere proporzionali, non potendosi dare proporzione tra quantità eterogenee come sono tra di loro le positive, e negative; sicchè sarà $- 1 : - a :: - b : - ab$; dunque il prodotto di due quantità negative

(ſe è poſſibile), è negativo, non poſitivo come comunemente ſi dice.

11

Gli eſempj, dirà taluno, dimoſtrano evidentemente, che $+ \times -$, ovvero $- \times +$ produce $-$; e $- \times -$ produce $+$. Di fatti debbaſi, per eſempio, moltiplicare $5 - 3$ per $2$, il prodotto ſarà $10 - 6 = 4$; dunque $2 \times - 3 = - 6$. Parimenti $5 - 3$ abbiaſi da moltiplicare per $5 - 3$, il prodotto ſarà $25 - 15 - 15 + 9 = 4$; quindi è manifeſto, che $+ \times -$, ovvero $- \times + = -$, e $- \times - = +$. Quello poi, che vedeſi chiaro in queſti eſempj ſi può ſimilmente provare con altri infiniti; dunque ec.

In ſecondo luogo le dimoſtrazioni, che arrecano gli autori, fanno vedere, che ſegni ſimili danno nel prodotto $+$, e ſegni contrarj danno $-$.

Il medeſimo dicaſi della diviſione ſia in queſto, che nel caſo antecedente.

12

Comincio dagli eſempj, i quali dico, che in niſſuna maniera provano $+ \times -$, ovvero $- \times +$ produrne $-$, o $- \times -$ produrre $+$.

Sia in generale $a - b$ da moltiplicarſi

per $c$, il prodotto è bensì $ac - bc$, ma il ſegno $-$ prefiſſo al termine $bc$ non deriva dalla moltiplicazione, ma dalla ſottrazione, di cui è ſegno il $-$. Pongaſi $a - b = m$, ſarà $a = b + m$; dunque $ac = bc + cm$ (prop. 1 del 2º d' Euclide), ed $ac - bc = cm$; dunque il ſegno del termine $bc$ non naſce dalla moltiplicazione, ma bensì dalla ſottrazione.

13

Sia $(a - b) . (c - d)$, del prodotto $ac - bc - ad + bd$, il ſegno $-$ dei termini $bc$, $ad$, ed il ſegno $+$ del termine $bd$ debbonſi i primi dalla ſottrazione, ed il ſecondo ripetere dall' addizione. Di fatti pongaſi $a - b = f$, $c - d = g$, ſarà $a = b + f$, $c = d + g$; dunque $ac = bd + bg + df + fg$, e ſoſtituendo in vece di $f$, e $g$ nei termini $bg$, $df$ i loro valori $a - b$, $c - d$, avremo $ac = bd + bc - bd + ad - bd + fg = bc + ad - bd + fg$: quindi $ac - bc - ad + bd = fg$; onde è manifeſto, che i ſegni dei termini $- bc - ad$ naſcono dalla ſottrazione, ed il ſegno del termine $+ bd$ deriva dall' addizione.

14

La coſa è manifeſta dagli eſempj ſingolari. Quando ſi moltiplica $5 - 3$ per $2$,

prendendo 5 due volte si prende tre volte di troppo, sicchè sarà d'uopo di levare dal prodotto di $2 \times 5$ il prodotto di $2 \times 3$, il che ripone il prodotto nel suo giusto valore; ma questo, come si vede chiaro, è l'opera della sottrazione, non già della moltiplicazione, avendo tanto che fare colla moltiplicazione i segni $+$, e $-$, come il segno $\times$ coll' addizione, o sottrazione.

15

Parimenti quando si moltiplica $5-3$ per $5-3$, il cui prodotto è $25-15-15+9$, moltiplicando 5 per 5, il prodotto eccede di due volte 15, perchè si levano tre unità dal moltiplicatore, e tre dal moltiplicando, ma levandovi due volte 15 levasi di troppo, e bisogna aggiugnervi $3 \times 3$, che è appunto quel di troppo, che erasi levato, ed allora $(5-3) . (5-3) = 2 \times 2 = 4$; dunque i segni $-$ dei due 15, ed il segno $+$ del 9 derivano i primi dalla sottrazione, ed il secondo dalla addizione.

16

Lo stesso provasi dalla moltiplicazione figurata. Se si moltiplica (fig. 1.) $AB = 2$ per $BC = 5$, il prodotto è $BD = 10$. Ma questo prodotto è troppo grande, non

dovendosi prendere tutta $BC = 5$, ma soltanto $BE = BC - CE = 5 - 3$; sicchè il prodotto sarà $AB . BC = BF$, levandosi $ED$ da $BD$.

17

Sia parimenti ( fig.2.) $AB = 5$, $BE = 3$, $AD = 5$, $DF = 3$, sarà $(AB - BE) . (AD - DF) = (5-3).(5-3)$. Moltiplicando $AB$ per $AD$, il prodotto è $AC = 25$; ma da questo prodotto si deve togliere $AB$, ossia $FH . DF$, ed $AD$, ossia $BC . BE$, cioè i rettangoli $DG + GC$, e $BG + GC$; ma operando in questa maniera si leva una volta di troppo il quadrato $GC$, sicchè sarà d' uopo aggiungerlo una volta; dunque il prodotto $(AB - BE) . (AD - DF)$ sarà $AE . AF = AC - DG - GC - GB - GC + GC = AG.$, siccome $(5-3).(5-3) = 25 - 9 - 6 - 9 - 6 + 9 = 4$.

18

Quindi la capacità dell' ingegno umano, di cui il cel. P. *Clavio* diceva doversi accagionare la debolezza, perchè non possa comprendere come $- \times -$ produca $+$, sebbene ciò venga da molti esempj confermato, resta trai suoi limiti.

Imperciocchè gli esempj fanno bensì

conoſcere, che (13.) moltiplicando $a-b$ per $c-d$ ( ſintantochè $a>b$, e $c>d$, perchè ſe foſſe $a<b$, $c<d$, la coſa ſarebbe impoſſibile, come ſi è veduto (n.4), il prodotto è $ac-bc-ad+bd$; ma il ſegno $+$ del termine $bd$, come ſi è dimoſtrato, non deriva dalla moltiplicazione, ma dalla addizione, e per l'altra parte l'ingegno umano non è tenuto a comprendere l'incomprenſibile, perchè impoſſibile.

19

Sicchè reſta chiaro, che i ſegni $+$, e $-$ indicano ſoltanto la ſomma, o ſottrazione da farſi; che i ſegni medeſimi non poſſono moltiplicarſi ( il medeſimo dicaſi della diviſione ).

Ma quand' anche ſi deſſero quantità negative aſſolute, dico, che $+\times-$ non produrrebbe $-$, e $-\times-$ non produrrebbe $+$.

Di fatti il moltiplicatore non può entrare nel prodotto ( non eſſendo altro il prodotto che il moltiplicando ripetuto tante volte, quante unità contiene il moltiplicatore), ed è ſempre un numero aſtratto nè poſitivo, nè negativo.

Dunque moltiplicando $-a$ per $b$, il prodotto ſarebbe $-ab$; ma ſe $a$ doveſſe mol-

tiplicarsi per $-b$, ovvero $-a$ per $-b$, sarebbe impossibile, dovendo il moltiplicatore essere un numero astratto.

Sarà pertanto $a \times -b$ falsa espressione, e la vera sarebbe $-a \times b = -ab$, e $-a \times -b, --ab$, cioè il prodotto di $-a$ per $b$ da sottrarsi, sicchè il segno $+$ del prodotto $ab$ verrebbe dalla sottrazione, non già dalla moltiplicazione.

20

Allorchè dunque si moltiplica una quantità negativa per un' altra negativa, tutte due assolute, si commettono due errori, il primo nel supporre, che diansi veramente tali quantità assolute, il secondo, che il moltiplicatore possa essere un numero negativo, contro il detto (§§. 4. 19.)

21

Dunque gli esempj non fanno vedere, che nella moltiplicazione, e divisione i segni medesimi danno $+$, ed i segni contrarj danno $-$.

Vediamo ora, se le dimostrazioni degli Autori provino ciò, che è in questione, e per non essere troppo prolisso mi atterrò al trattato del cel. *Euler* degli ultimi delle sue opere tom. 1 dell' analisi determinata.

Dice pertanto pag. 6. n. 8. „ Quando ſi
„ tratta di aggiungere un dato numero ad
„ un altro numero dato, ciò ſi indica col
„ ſegno +, che ſi prefigge a queſto ſe-
„ condo numero. Così 5 + 3 ſignifica, che
„ al numero 5 deveſi aggiungere il nu-
„ mero 3, e la ſomma ſarà 8 ec.

*Riſpoſta.* Dunque il ſegno + indica la ſomma da farſi, ovvero doverſi ad un dato numero aggiungere altro dato numero, non ſemplice poſizione, o direzione, per toglie-re ogni ambiguità.

22

Pag. 7. n. 11. „ Quando ſi tratta di
„ ſottrarre un numero da altro numero,
„ ſi indica queſt' operazione col ſegno —,
„ che ſignifica *meno*, e che ſi premette al
„ numero da ſottrarſi. Così 8 — 5 ſignifica,
„ che il numero 5 deve eſſer ſottratto dall' 8.

*R.* Dunque il ſegno — indica la ſottrazione da farſi, ovvero una parte da levarſi da un tutto, non già ſemplice negazione, o direzione ad altra data direzione contraria.

23

Pag. 12. n. 19. „ Siccome i numeri poſi-
„ tivi ſono > 0, i numeri negativi ſono < 0.

*R.* Se i numeri ſono $<$ o; dunque ſarà per eſempio o $> - 3$, e levando $- 3$ da una parte, e dall' altra, ſarà o $- - 3 = 3 >$ o, da cui è ſtato ſottratto, cioè la parte maggiore del tutto.

Parimenti poichè o $> - 3$, moltiplicando tanto o, che $- 3$ per $- 3$ ( pongo $- 3$ per moltiplicatore nel ſenſo degli Algebriſti ), ſarebbe o $\times - 3 =$ o $> 9$; ſicchè dai principj del sig. *Euler* o ſarebbe $<$, e $>$ nel tempo ſteſſo dei numeri poſitivi.

Dividaſi o $> - 3$ per $- 3$; ſarà $\frac{0}{-3} > + 1$;

ora ſecondo i noſtri Algebriſti o diviſo per qualunque quantità dà o per quoziente, e $-$ diviſo per $-$ dà $+$, ſicchè ſarebbe o $> + 1$, cioè o $>$ di quantità poſitiva contro i principj dei noſtri signori Algebriſti.

Finalmente ſi alzi tanto lo o, che il $- 3$ ad una poteſtà di indice pari $n$, ſarebbe o $> + 3^n$, cioè ſarebbe o $>$ di qualunque numero poſitivo; aſſurdi tutti provenienti dal ſupporre o $>$ di quantità negative, ſupponendo prima che queſte ſi diano ſole, ed aſſolute.

24

Pag. 12. n. 19. „ Abbiamo numeri poſitivi aggiungendo 1 allo zero ec., e

„ numeri negativi togliendo l' unità dello
„ zero ec.

*R.* Che grande estensione di cognizioni ci procaccia il sig. *Euler*, quando mette o capo di una serie di numeri positivi, e capo di una di negativi! Se avesse fatto uso del senso comune, che non è proibito ai signori Matematici, avrebbe detto semplicemente porre nel primo caso, e nel secondo direbbe, che ripugna levare qualche cosa dal niente, perchè *nemo dat quod non habet.* Nè mi si dica questo avere il suo uso nei logaritmi principalmente, non avendo i logaritmi bisogno di metafisica così sublime.

25

Pag. 14. n. 21. „ Importa al sommo in
„ tutto il corso dell' algebra il formarsi un'
„ idea chiara di queste quantità negative.

*R.* Ci guardi il Cielo dalla chiarezza d' idee, che se n' è formato il signor *Euler* con tanti altri insigni Calcolatori di queste quantità negative. Che bella chiarezza d'idee: *quantità minori del niente, al di sotto del niente!* Le quantità negative non derivano dal niente, sono correlative alle quantità, che chiamansi positive. Ogni quantità negativa risulta o da sottrazione rigorosa, o

da sottrazione per imprestito, e perchè nella sottrazione per imprestito si prende quel, che manca, dalle quantità esistenti dette positive, bisognerebbe aver esauste tutte le quantità positive possibili, perchè si dessero quantità negative: onde se vi fosse soltanto $a$ di quantità positive, sarebbe impossibile che vi fosse $a + 1$ di quantità negative.

26

Pag. 21. n. 33. „ Restaci ancora da ri-
„ solvere questo caso, dove — è moltipli-
„ cato per —, per esempio $-a$ per $-b$.
„ Egli è evidente, che quanto alle lettere
„ il prodotto sarà $ab$; ma è ancora incer-
„ to se il segno +, od il segno — debba
„ prefiggersi a questo prodotto: quel che
„ sappiamo si è, che sarà l'uno, o l'altro
„ di questi segni; ora io dico, che non
„ può essere il segno —; imperciocchè
„ $-a$ per $+b$ dà $-ab$; e $-a$ per $-b$
„ non può produrre il medesimo risultato
„ che $-a$ per $+b$, ma dee risultarne
„ l'opposto, cioè a dire $+ab$; per conse-
„ guenza noi avremo questa regola — X —
„ fa + nella stessa guisa che + X + fa +. „

*R.* Il signor *Euler* si è contentato di un raziocinio tutto affatto inconcludente. Se — X — non può dare — nel prodotto,

perchè $- \times +$ produce di già $-$; per la ſteſſa ragione $- \times -$ non potrà dare $+$, perchè $+ \times +$ produce già $+$.

Ma il signor *Euler* ha laſciato un caſo terzo, ſicchè dire dovea o nè l'uno, nè l'altro, come di fatti ſi è per via della moltiplicazione, di cui $+$ e $-$ non ſono ſegni. Oltre a ciò, come vedremo in appreſſo, ſe coi ſegni $+$ e $-$ vogliònſi ſignificare le direzioni, è manifeſto errore il dire dovere eſſere o l'uno, o l'altro di queſti ſegni.

27

Pag. 22. n. 34. „ Le regole, che noi „ abbiamo ſviluppate, ſi eſprimono più bre„ vemente nella maniera ſeguente: due „ ſegni uguali, o ſimili moltiplicati l'uno „ per l'altro danno $+$; due ſegni diſſimi„ li, o contrarj danno $-$.

*R.* Non dandoſi moltiplicatore negativo (19) le regole (inteſe ſanamente (8. e ſeg.) ſi riducono a due ſole $+ \times + = +$, e $- \times + = -$.

28

Pag. 38. n. 55. „ Se ſi tratta di divi„ dere $+ab$ per $-a$, il quoziente ſarà „ $-b$ . . . . Che ſe il dividendo è $-ab$,

„ e ſi tratti di dividerlo pel diviſore $+a$,
„ il quoziente ſarà $-b$.

*R.* La diviſione è il roveſcio della moltiplicazione. Non ſi dee mai proporre per diviſore, ſe non ſe il moltiplicando, che ha ſervito per formare il prodotto dato ſotto il nome di dividendo. Allora il quoziente, che eſprime quante volte il diviſore è contenuto nel dividendo, dà il moltiplicatore, che avea indicato quante volte biſognava ripetere il moltiplicando per formare il prodotto. Quindi è chiaro, che ciò, che il sig. *Euler* chiama il quoziente $-b$, non è che la ſottrazione del vero quoziente $b$. Nè ſi può propriamente dividere $+ab$ per $-a$, nè $+ab:-a$ è una vera ragione geometrica.

29

Pag. 38. n. 56. „ La diviſione ammette
„ adunque quanto ai ſegni + e — le me-
„ deſime regole, che noi abbiamo veduto
„ aver luogo nella moltiplicazione, cioè
„ + per + fa +, + per — fa —, — per
„ + fa —, — per — fa + ec.

*R.* Siccome nella diviſione il dividendo, ed il diviſore debbono eſſere omogenei, ed il quoziente ſempre poſitivo, le regole ſi riducono a + diviſo per + fa +, e — diviſo per — dà +, nel ſenſo del §. 27.

30

Pag. 39. n. 57. „ Quando que dividesi „ $18pq$ per $-3p$, il quoziente è $-6q$; „ $-30xy$ diviso per $+6y$, dà $-5x$; „ $-54abc$ diviso per $-9b$, dà $+bac$. „

*R.* Il primo esempio ripugna, perchè sia che il quoziente sia $-6q$, o $+6q$, il quoziente moltiplicato pel divisore produrrebbe $-18pq$.

Nel secondo esempio bisogna mettere il quoziente in luogo del divisore, ed il quoziente sarà $+6y$.

Il terzo esempio è secondo deve essere.

31

Pag. 84. n. 114. „ $+\frac{1}{2} \times -\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$; „ e $-\frac{2}{3} \times -\frac{4}{5} = +\frac{8}{15}$. Inoltre $-\frac{5}{8}$ diviso „ per $+\frac{2}{3}$ dà $-\frac{15}{16}$, e $-\frac{3}{4}$ diviso per $-\frac{3}{4}$ dà „ $\frac{12}{12} = 1$.

*R.* $+\frac{1}{2} \times -\frac{1}{3}$ è mal ordinato, ordinato sarebbe $-\frac{1}{3} \times +\frac{1}{2}$, non potendosi dare moltiplicatore negativo (19).

Il secondo, e terzo esempio sono falsi (27. 29.).

Il quarto è secondo le regole.

32

Pag. 90. n. 122. „ Se la radice è un „ numero negativo, il quadrato è positivo

„ $+aa$. Noi possiamo dunque conchiude-
„ re, che $+aa$ è il quadrato tanto di
„ $+a$, che di $-a$, e che per conseguen-
„ za si possono indicare per ogni quadra-
„ to due radici, l' una positiva, e l'altra
„ negativa. „

*R*. Questi sono i principj, che hanno impedito i progressi dell' algebra, viziato il calcolo, e che sono stati occasione di tanti paradossi, che non dovrebbero ritrovarsi, nè tollerarsi nelle scienze Matematiche, le quali di loro diritto hanno la certezza, ed evidenza: principj contrarj al buon senso, ed al ragionamento, che vogliono, che il prodotto sia della specie del moltiplicando, e che il moltiplicatore sia sempre un numero astratto,

Dunque la radice $+a$ avrà il solo quadrato $+aa$, e la radice $-a$ il quadrato $-aa$.

33

Pag. 102. n. 140. „ Quando si tratta
„ di estrarre la radice da un numero ne-
„ gativo, non possiamo a meno di non
„ essere molto intrigati, non essendovi al-
„ cun numero assignabile, il cui quadrato
„ sia negativo; imperciocchè supporre,
„ per esempio, che si voglia estrarre la

„ radice di — 4, ſarebbe chiedere un nu-
„ mero tale, che moltiplicato per ſe ſteſſo
„ produceſſe — 4. Ora queſto numero cer-
„ cato non è + 2, nè — 2, perchè il
„ quadrato tanto di + 2, che di — 2 è
„ + 4, non già — 4.

*R.* Conſeguenze falſe vengono da falſi principj. Se il sig. *Euler* cogli altri signori Algebriſti, che trattano gli elementi del calcolo, aveſſero uſato più la ragione che la fantaſia, ed il meccaniſmo, ed una parte del molto talento impiegato aveſſero nello eſaminare, ſe i fondamenti, ſu cui fabbricavano, erano ſtabili, ſenza laſciarſi ſtraſcinare dall' autorità, avrebbero beniſſimo compreſo, che il moltiplicatore non entra nel prodotto, che il moltiplicatore eſſendo un numero aſtratto non è omogeneo al moltiplicando, nè al prodotto. Per la qual coſa è un' aſſurdità il dire, che una quantità ſia moltiplicata per ſe ſteſſa per formare un quadrato, non potendo il moltiplicatore convenire in quantità, e qualità col moltiplicando. Dunque — $a$ ripetuto $a$ volte darà il quadrato — $a^2$, ſiccome — $a$ ripetuto $b$ volte dà il rettangolo — $ab$, non differendo il quadrato dal rettangolo, che dal numero di volte che

ſi prende eſſo moltiplicando. Si licenzino i falſi principj, e ſi uſcirà d'imbroglio.

34

Pag. 105. n. 144. ,, Tutte le eſpreſſio-
,, ni come $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ ec.
,, ſono per conſeguenza numeri impoſſibi-
,, li, od immaginarj, indicando radici di
,, quantità negative: e ſono sì fatti nu-
,, meri, che ſi ſoſtiene con ragione, che
,, ſono nè o, nè $>$o, nè $<$o; il che
,, principalmente ci coſtringe a dichiararli
,, impoſſibili. ,,

*R.* Richiedeſi un genio traſcendente per formarſi un'idea di quantità, che ſono nè o, nè $>$o, nè $<$o, e ſebbene impoſſibili, ſoggette però al calcolo, come poſcia vedraſſi.

35

Pag. 105. n. 145. ,, Nulladimeno queſti
,, numeri ſi preſentano alla mente; eſſi han
,, luogo nella noſtra immaginazione, e noi
,, non tralaſciamo d'averne un'idea ſuffi-
,, ciente; poichè noi ſappiamo, che per
,, $\sqrt{-4}$, per eſempio, s'intende un nu-
,, mero, che moltiplicato per ſe ſteſſo pro-
,, duce $-4$: e perciò niente oſta d'appli-
,, care il calcolo a queſti numeri immagi-
,, narj, e farne uſo. ,,

*R.* Ecco dunque numeri impoſſibili, che ſono nè o, nè $>$o, nè $<$ o, i quali contuttociò ſi preſentano alla mente, hanno luogo nell' immaginazione, ed a cui ſi applica il calcolo. Qual maraviglia, che applicato il calcolo a ſiffatte quantità, diano riſultati così aſſurdi come ſono i ragionamenti, onde riconoſcono la loro origine!

36

Pag. 107. n. 148. „ Siccome $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ „ $=\sqrt{ab}$, avremo $\sqrt{6}$ per prodotto di $\sqrt{-2}.$ „ $\sqrt{-3}$; e $\sqrt{4}$, oſſia 2 per prodotto di „ $\sqrt{-1}.\sqrt{-4}$. Dal che ſi vede, che due „ numeri immaginarj moltiplicati l'uno per „ l'altro ne producono uno reale, o poſ„ ſibile; per lo contrario un numero poſ„ ſibile moltiplicato per un numero im„ poſſibile dà un prodotto immaginario: „ $\sqrt{-3}.\sqrt{+5}=\sqrt{-15}$. „

*R.* $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, ma $\sqrt{-2}.\sqrt{-3}$ non è $=\sqrt{6}$; imperciocchè non potendo $\sqrt{-3}$ eſſere vero moltiplicatore (19), dobbiamo dire $\sqrt{-2}.\sqrt{-3}=\sqrt{-6}$, oppure $\sqrt{-3}.$ $\sqrt{2}=\sqrt{-6}$. Parimenti $\sqrt{-1}.\sqrt{-4}$ non è $=\sqrt{4}=2$, ma debbeſi dire $\sqrt{-1}.\sqrt{4}$, ovvero $\sqrt{-4}.\sqrt{1}=\sqrt{-4}=-2$. Il prodotto $\sqrt{-3}.\sqrt{5}$ è $\sqrt{-15}$, come dice l'Autore.

37

Pag. 107. n. 149. „ Il medesimo avviene nella divisione; imperciocchè $\sqrt{a}$ „ divisa per $\sqrt{b}$ facendo $\sqrt{\frac{a}{b}}$, egli è chiaro, che $\sqrt{-4}$ divisa per $\sqrt{-1}$, sarà „ $\sqrt{+4}$, ossia 2: che $\sqrt{+3}$ divisa per $\sqrt{-3}$, „ sarà $\sqrt{-1}$, e che 1 diviso per $\sqrt{-1}$ „ mi dà $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, perchè 1 è la stessa „ cosa che $\sqrt{+1}$. „

*R.* E' manifesto, che $\sqrt{-4}$ divisa per $\sqrt{-1}$ dà $\sqrt{4} = 2$, essendo il dividendo, ed il divisore della medesima specie, ed il quoziente numero astratto (28). Ma lo stesso non può dirsi di $\sqrt{+3}$ divisa per $\sqrt{-3}$, non essendo il divisore della medesima specie; onde $\sqrt{-1}$ è un falso quoziente.

38

Pag. 109. n. 151. „ Restaci finalmente „ da togliere il dubbio, che potrebbe aversi „ riguardo all'utilità dei numeri, di cui „ abbiamo parlato; imperciocchè in effetto essendo questi numeri impossibili, non „ sarebbe meraviglia, che si giudicassero „ affatto inutili, e l'oggetto soltanto di „ una vana specolazione. C'inganneremo

„ per altro; il calcolo delle quantità im-
„ maginarie è di ſomma importanza: ſo-
„ venti ſi preſentano delle queſtioni, le
„ quali non ſaprebbeſi a prima viſta, ſe
„ contengano qualche coſa di reale, o
„ poſſibile, o no. Or quando la ſoluzione
„ di ſiffatta queſtione ci mena a numeri
„ immaginarj, ſiamo certi, che quel, che
„ cercaſi, è impoſſibile.

*R.* Se calcolando condotti ſiamo a queſte quantità immaginarie veramente, in tal caſo è inutile affatto il calcolo; onde è d'uopo ritornare indietro, contenendo la queſtione qualche coſa di contraddittorio, come per eſempio, che una quantità dividaſi in due parti, ſicchè il prodotto di una per l'altra ſia maggiore del maſſimo, che è il quadrato della metà per la prop. 5. del 2. lib. d'Euclide. Ma di queſto ne parlerò in appreſſo.

39

Pag. 130. n. 179. „ Noi dobbiamo an-
„ che conſiderare le potenze dei numeri
„ negativi. Ora ſupponiamo il numero
„ dato $-a$, le di lui potenze ſi ſegui-
„ ranno nell'ordine ſeguente $-a$, $+a^2$,
„ $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$ ec. Si vede adunque,
„ che le ſole potenze di numero diſpari

„ diventano negative, e che al contrario „ tutte le potenze di numero pari sono „ positive. „

*R.* Non potendo darsi moltiplicatore negativo (19), è chiaro, che le potenze di $-a$ sono $-a$, $-a^2$, $-a^3$, $-a^4$, $-a^5$ ec. Si conferma questa verità dagli assurdi, che ne verrebbero dalla irregolare progressione $-a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$ ec. Imperciocchè essendo una potenza media proporzionale tra l' inferiore, e la superiore, e se si tratta della prima potenza essendo media proporzionale tra l' unità, ed il quadrato, sarebbe $+1 : -a :: -a : +a^2$ $-a : +a^2 :: +a^2 : -a^3$ ec, ma non può darsi ragione tra due quantità eterogenee $+1 : -a$, o $-a : +a^2$ ec., per l' altra parte queste ragioni sarebbero disuguali, le une di maggiore, le altre di minore inegualità.

40

Questa è stata la questione, che ha fatto dire al cel. *Leibnitz* ( epist. 205. com. epist. ) . . . . „ ex quibus intelligitur in „ ipsis rei analyticæ fundamentis aliqua „ adhuc neglecta fuisse. „

Avrebbe, mi sembra, meglio detto: *turpiter erratum fuisse*, essendo intollerabili gli errori nei principj d' una scienza, siccome

quelli, che estendonsi in tutti i rami della medesima.

Dal medesimo fonte è derivata la questione: se i logaritmi dei numeri negativi siano reali, od immaginarj, cotanto celebre, ed agitata tra il sig. *Leibnitz*, ed il sig. *Giovanni Bernullio*, e rinnovata tra il sig. *D'Alembert*, ed il signor *Euler*. I signori *Bernullio*, e *D'Alembert* volevano, che fossero reali questi logaritmi, e gli stessi che i logaritmi dei numeri positivi: all'opposto i signori *Leibnitz*, ed *Euler* li pretendevano immaginarj. Il signor Cavaliere di *Foncenex* nel tom. 2. della Miscel. Fisico-Matem. della Società R. di Torino si crede di comporre la lite separando la questione aritmetica dalla geometrica con dire coi signori *Leibnitz*, ed *Euler*, che i logaritmi dei numeri negativi sono immaginarj, coi signori *Bernullio*, e *D'Alembert*, che la logaritmica è composta di due rami.

41

Cap. V. pag. 222. n. 289. „ Della risoluzione delle frazioni in serie infinite. „ Quando il dividendo non si può dividere pel divisore, il quoziente esprimesi, „ come l'abbiamo già detto, per mezzo „ di una frazione. In questa guisa se dividiamo

„ 1 per $1 - a$, abbiamo la frazione $\frac{1}{1 - a}$
„ Ciò nondimeno non impedisce, che non
„ si possa intraprendere la divisione secon-
„ do le regole date, e che non si possa
„ continuare in lungo quanto si vuole. Ri-
„ trovasi il vero quoziente, sebbene sotto
„ forme diverse. „

*R*. Dividendo 1 per $1 - a$, abbiamo fuor di dubbio l'espressione $\frac{1}{1 - a}$, ma che dalla frazione $\frac{1}{1 - a}$ si possa cavare una serie, che dia il valore di una frazione propriamente detta minore dell'unità si stenta un poco a concedersi; imperciocchè l' unità dovendo far parte di questa serie non alternativa, quest' ultima esprimerà, e darà di necessità un valore maggiore dell' unità, che è ciò, che non si cerca. Per avere d' intieri bisogna necessariamente supporre $a < 1$; perchè supponendo $a > 1$, avremmo un divisore negativo, il quale non potendo essere contenuto nel dividendo positivo, darebbe una serie divergente in forma di differenza addizionale (dicesi differenza addizionale quella, in cui le due quantità essendo di specie differenti, riduconsi alla medesima specie per potere essere sommate, così sottraendo $-4$ da $12$, la differenza è $16$. ec.)

continuata, cioè a dire un prodotto in vece di un quoziente.

42

Pag. 223. n. 290. „ Per provarlo dividasi attualmente il dividendo 1 pel divisore $1-a$, come siegue

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-a \\
 & 1+a+a^2+a^3+a^4 \text{ ec.} \\
+1-a & \\
\text{Res.}\ +a & \\
\quad +a-a^2 & \\
\quad \text{Res.}\ +a^2 & \\
\qquad +a^2-a^3 & \\
\qquad \text{Res.}\ +a^3 \text{ ec.} &
\end{array}
$$

„

*R.* Sia dato il valore $a$, quindi $a \times a$, avrassi $a + a^2$, si moltiplichi $a^2$ per $a$, avremo $a^3$, che moltiplicato per $a$ darà $a^4$ ec. i quali prodotti riuniti, aggiuntavi l' unità, o coefficiente 1 del primo termine, daranno la serie $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ ec. tutta composta di prodotti, che è la stessa del signor *Euler* tutta composta di quozienti. Dunque quando l' autore credeasi di fare una divisione, faceva una vera moltiplicazione. La vera formola della serie delle frazioni propriamente dette è la seguente, che

nasce da $\frac{1}{a-1}$ posto $a > 1$, che rende tutti i termini della serie frazionarj come conviene $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}$ ec.

43

Pag. 227. n. 293. „ Supponiamo in pri-
„ mo luogo $a = 1$, la nostra serie diverrà
„ $1 + 1 + 1 + 1$ ec. all' infinito. La fra-
„ zione $\frac{1}{1-a}$ cui debbe essere uguale,
„ diviene $\frac{1}{0}$. Ora noi abbiamo notato di
„ sopra, che $\frac{1}{0}$ è un numero infinitamente
„ grande; ciò confermasi quì pertanto di
„ una maniera elegante. „

*R*. Niente prova meglio l' assurdità della formola generale $1 + a + a^2 +$ ec. in qualità di quoziente, che le applicazioni singolari. In fatti come ci persuaderemo, che la falsa ragione $1 : 0$ abbia un valore infinito rappresentato da $1 + 1 + 1 + 1$ ec.? Il signor *Euler* nel capo V. dice, che parlerà delle frazioni propriamente dette ridotte in serie, ed ecco, che ci dà quantità infinitamente grandi per equivalente di una frazione di un' unità, ed il denominatore della frazione esprimendo in quante

parti uguali l' unità è ſtata diviſa, zero fa queſta funzione di una maniera elegante.

44

Pag. 227. n. 293. „ Ma ſe ſupponiamo „ $a = 2$, la noſtra ſerie diviene $1 + 2 + 4$ „ $+ 8 + 16$ ec. all' infinito, ed il di lei „ valore deve eſſere $\frac{1}{1 - 2}$, cioè $\frac{1}{-1} = -1$, „ il che a prima viſta parrà aſſurdo; ma „ biſogna oſſervare, che ſe vogliamo ar- „ reſtarci a qualche termine della ſerie „ ſuddetta, biſogna aggiungervi la frazio- „ ne, che ci reſta. Supponiamo, per eſem- „ pio, che vogliamo arreſtarci al $a\,64$, „ biſognerà, dopo d'avere ſcritto $1 + 2 + 4$ „ $+ 8 + 16 + 32 + 64$, aggiungerci la „ frazione $\frac{128}{1 - 2}$ ovvero $\frac{128}{-1} = -128$: „ avremo adunque $127 - 128$, vale a di- „ re in effetto $- 1$.

*R.* Quanto più ſcema il denominatore di una frazione, reſtando il medeſimo numeratore, tanto più creſce il valore del quoziente, contenendoſi più volte un numero minore, in un dato numero, che un maggiore, ma $\frac{1}{0} = \infty$ (43), $0 > -1$ (23); dunque $\frac{1}{-1} > \infty$; pertanto $\frac{1}{-1}$ non è $= -1$, che è $< 0$.

Quanto a ciò, che dice il signor *Euler*, che ſe vogliamo arreſtarci a qualche termine della ſerie, biſogna aggiugnervi la frazione reſidua, vediamo ciò, che quindi guadagna. Supponiamo, dice egli, che vogliamo arreſtarci a 64, biſogna dopo d'avere ſcritto $1 + a + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ aggiugnervi la frazione $\frac{128}{-1} = -128$. Ecco lo ſpropoſito maſſiccio. Di fatti $\frac{128}{-1}$ ſecondo *Euler* non è $-128$, ma $>$ oo, eſſendo già $\frac{1}{0} =$ oo, ed $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$, e per conſeguenza $>$ oo, ed è $\frac{128}{-1} > \frac{2}{-1}$.

45

Pag. 228. 229. nn. 294. 295. 296. „ Ecco
„ dunque delle conſiderazioni neceſſarie,
„ quando prendonſi per $a$ dei numeri $> 1$.
„ Ma ſe ſi ſuppone $a < 1$, tutto diventa
„ più facile a concepirſi. Sia, per cagion
„ d'eſempio $a = \frac{1}{2}$, ſarà $\frac{1}{1-a} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
„ $+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ec. all'infinito $= 2$. Se $a = \frac{1}{3}$,
„ ſarà $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ ec. $= \frac{3}{2}$. Se $a = \frac{2}{3}$,
„ la frazione $\frac{1}{1-a} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}$ ec. $= 3$ ec. „

*R.* Tutte le considerazioni, che fa il signor *Euler*, e che si possono fare posto $a > 1$, non levano gli assurdi manifesti, che derivano dalle dette serie; bisogna pertanto supporre $a < 1$, e levate le assurdità dai principj, saranno tolte altresì dalle conseguenze.

46

Pag. 230. n. 298. „ Potrassi nella stessa „ guisa risolvere in serie infinita la frazione „ $\frac{1}{1+a}$, dividendo attualmente il nume- „ ratore 1 pel denominatore $1+a$. Ecco „ l'operazione.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+a \\
\hline
1+a & 1-a+a^2-a^3+a^4-\text{ec.} \\
\hline
\text{Res.} -a & \\
\quad -a-a^2 & \\
\hline
\quad \text{Res.} +a^2 & \\
\qquad +a^2+a^3 & \\
\hline
\qquad \text{Res.} -a^3 \text{ ec.} &
\end{array}
$$

„ Sicchè la frazione $\frac{1}{1+a} = 1-a+a^2-a^3$ „ $+a^4-a^5+$ ec.

*R.* Il signor *Euler* comincia benissimo la divisione 1 diviso per 1 dà per quoziente 1. Il prodotto del divisore $1 + a$ moltiplicato pel quoziente 1 dà $1 + a$, che sottratto dal dividendo resta $-a$ dividendo della seconda operazione. Si dice in seguito $-a$ diviso per $+1$ dà per quoziente $-a$, quì vi è lo sbaglio, non potendo $+1$ essere contenuto in $-a$. Tale è la traccia della serie $1 - a + a^2 - a^3 +$ ec., di cui vediamone l' applicazione.

47

Pag. 231. n. 299. „ Se si suppone $a = 1$, „ abbiamo questo paragone rimarchevole „ $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ ec. „ all' infinito. Vi si troverà qualche cosa di „ contraddittorio; imperciocchè se ci arre„ stiamo $a - 1$, la serie dà 0, e se si ter„ mina per $+1$. ella dà 1. Ora questo è „ ciò, che toglie precisamente la difficoltà, „ dovendosi continuare all' infinito senza „ giammai arrestarsi, nè al $-1$, nè al „ $+1$, egli è chiaro, che la somma non „ può essere nè 0, nè 1, e che fa d'uopo, „ che questo risultato finale tenga un luogo „ di mezzo tra questi due, e che sia $\frac{1}{2}$. „

*R.* La ſerie giuſta, e regolare, che ha dato $\frac{1}{2}$ era $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} +$ ec.; quella, che dà $\frac{1}{2}$ al signor *Euler* è $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ ec. ſerie totalmente diverſa, e di diverſo valore. L' autore per altro dice, che la ſomma non potendo eſſere nè o, nè 1, deve eſſere di neceſſità $\frac{1}{2}$, non eſſendovi altro di mezzo tra o, ed 1. Le altre ſerie alternative del signor *Euler* hanno gli ſteſſi difetti, e perciò baſti il ſinquì detto.

48

Pag. 256. n. 329. „ Se ſi cerca il cubo „ di $-1+\sqrt{-3}$, ſi prenderebbe il quadrato di „ queſto numero, e ſi moltiplicherebbe an- „ cora queſto quadrato pel medeſimo nu- „ mero, ecco l'operazione.

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \text{ rad. cub.} \\ \underline{-1+\sqrt{-3}} \\ +1-\sqrt{-3} \\ \underline{\quad -\sqrt{-3}-3} \\ +1-2\sqrt{-3}-3 = -2-2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{-1+\sqrt{-3}} \\ \qquad\qquad\qquad\quad +2+2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-2\sqrt{-3}+6.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 2+6=8 \text{ cubo.} \end{array}$$ „

*R.* 8 essendo ugualmente il cubo di 2, e di $-1+\sqrt{-3}$, sarà $2=-1+\sqrt{-3}$, $3=\sqrt{-3}$, e quadrando $9=-3$, risultato assurdo, ed immaginario analogo alla specie delle quantità, alle regole del loro calcolo, che peccano in quantità, e qualità.

49

Pag. 520. n. 630. „ Il terzo caso è quel„ lo, in cui $\frac{a}{c}$ è un numero negativo; al„ lora il valore di $x$ è tutto affatto im„ possibile, ed immaginario, e questo risul„ tato prova, che la questione, che ha „ condotto ad una tale equazione, è im„ possibile. „

*R.* Il signor *Euler* propose l' equazione $axx=\pm c$, la quale divisa per $a$ offre tre casi, il terzo dei quali è $x=\sqrt{-a^2}$, $x=\sqrt{-49}$, valore impossibile secondo l' autore, il quale per altro è $-7$.

50

Pag. 520. n. 631. „ Sempre che si tratta „ di estrarre la radice quadrata da un nu„ mero, questa radice ha sempre due va„ lori, dei quali l' uno è positivo, e l' al„ tro è negativo, . . . che si indica per „ $x=\pm 7$. „

*R*. Sia $\sqrt{x^2} = -7$, e $\sqrt{x^2} = +7$, moltiplicando la prima equazione per la seconda, avremo $x^2 = -49$, in cui non vi entra $+7$. Sia parimenti $\sqrt{x^2} = +7$, e $\sqrt{x^2} = +7$, moltiplicando la prima per la seconda, avremo $x^2 = 49$, in cui non vi entra $-7$. Aggiungendo un' equazione all' altra sarà $2x^2 = 0$; sottraendo la prima dall' altra, sarà $0 = 98$, equazioni false. Dunque è falso, che sia $\sqrt{x^2} = \pm 7$.

51

Pag. 522 n. 633. „ Prima questione. Si „ cerca un numero, di cui la metà moltiplicata per la terza parte produca 24. „ Sia questo numero $x$, bisogna, che $\frac{1}{2} x$ „ $\times \frac{1}{3} x$ sia $= 24$; avremo dunque $\frac{1}{6} x^2 = 24$, „ moltiplicando per 6, sarà $x^2 = 144$, e „ l' estrazione della radice dà $x = \pm 12$. „ Si mette $\pm$; imperciocchè se $x = +12$, „ sarà $\frac{1}{2} x = 6$, ed $\frac{1}{3} x = 4$, ed il pro„dotto di questi due numeri è 24; e se „ $x = -12$, abbiamo $\frac{1}{2} x = -6$, ed „ $\frac{1}{3} x = -4$, ed il prodotto è ugualmente „ $+24$. „

*R*. Se $x = -12$, bisognerà di necessità (19) trasformare uno dei fattori, $-4$, ovvero $-6$ in positivo, o per dir meglio in numero astratto, per avere un vero

moltiplicatore, ed il prodotto risulterà da — 4 per + 6, o da — 6 per + 4, che darà — 24, non già 24. Prova indubitata, che il segno — delle formole mena a falsi prodotti.

52

Pag. 523. n. 634. „ Seconda questione. Si „ cerca un numero tale, cui aggiuntovi 5, „ e da cui sottratto 5, il prodotto della „ somma per la differenza sia = 96. Sia que„sto numero $x$, bisognerà, che $(x+5).(x-5)$ „ $= 96$. Sicchè sarà $x^2 - 25 = 96$; onde $x^2$ „ $= 121$, ed $x = \pm 11$. Così $x + 5 = 16$, „ $x - 5 = 6$, e $-x + 5 = -6$, $-x - 5$ „ $= -16$. Ora $6 . 16 = 96$; $-6 . -16$ „ $= 96$. „

*R.* Che il numero cercato non possa essere $-11$, è chiaro, perchè essendo in tal caso i fattori $+6$, e $-16$, per avere un vero prodotto, bisognerebbe cambiare il segno ad uno dei fattori per avere un vero moltiplicatore, ed allora il prodotto non sarebbe 96, ma $-96$ contrario al richiesto.

53

Pag. 531. n. 641. „ Se noi prendiamo „ di nuovo l'equazione $x^2 + px = q$, non „ abbiamo che aggiungere da una parte,

„ e dall' altra $\frac{1}{4}p^2$, il che ne dà $x^2px+\frac{1}{4}$
„ $p^2=q+\frac{1}{4}p^2$; se dunque estrarremo da
„ ambe le parti la radice quadrata, noi
„ troveremo $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$, ed avre-
„ mo $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$. „

*R.* Si vede dal procedimento, che il signor *Euler* cerca soltanto il vero valore di $x$, e non i valori, e questo valore è espresso dalla formola, che gli dà l' Algebra. Vediamo quello, che l' Algebra non dà, nè può dare.

54

Pag. 531., 532. n. 641., „ Siccome ogni
„ radice quadrata può essere presa afferma-
„ tivamente, o negativamente, noi avre-
„ mo per $x$ due valori espressi nella se-
„ guente maniera: $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$;
„ ecco la formola, che contiene la rego-
„ la, secondo cui tutte le equazioni di se-
„ condo grado possono essere sciolte.

*R.* Noi possiamo certamente dire: ecco la regola, che inganna tutti coloro, che la seguono. La vera regola, da cui non dobbiam dipartirci, si è di non estrarre da una equazione, che sia potenza perfetta,

che una sola radice. E'un errore il dire, che $-\times-$ faccia $+$.

55

Pag. 533. n. 643. „ Se avessimo l'equa-„ zione $x^2 = 6x + 7$, si direbbe subito, „ che $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$; d' onde ri-„ sultano questi due valori di $x$, $x = 7$, „ $x = -1$. Parimenti l' equazione $x^2 =$ „ $10x - 9$, darebbe $x = 5 \pm \sqrt{25-9} =$ „ $5 \pm 4$, cioè a dire, che i due valori „ di $x$ sono 9, ed 1. „

*R.* Se dall'equazione $x^2 = 6x + 7$ troviamo $x = 7$, perchè non contentarci di questo, sapendo, che da un prodotto qualunque non si può cavare che un moltiplicando, non facendo il moltiplicatore (19) parte del prodotto? Un problema determinato è risolto per sempre, quando è una volta ben risolto. Il secondo valore in una incognita è una ripugnanza, essendo che questo secondo valore distruggerebbe il primo, od apparterrebbe ad un' altra incognita. E'una legge di calcolo, che allor quando un' espressione generale ha avuta la sua determinazione in un problema singolare, non può averne ulteriori. Non sarebbe meglio il dire, che il problema contiene due incognite $x$, ed $y$, che il dare

ad $x$ il valore di $y$, senza lasciare il suo proprio? Sarebbe una confusione in Aritmetica il dare, per esempio, al 7 la forma di 8, o di 6, e perchè adunque in Algebra la stessa lettera $x$ esprimerà nello stesso tempo 7, e $-1$?

56

Pag. 576 n. 689. „ Abbiamo sufficien-
„ temente veduto da ciò, che precede,
„ che le equazioni del secondo grado si
„ possono in due maniere risolvere, e que-
„ sta proprietà merita per tutti i riguardi
„ di essere esaminata, perchè la natura
„ delle equazioni di grado superiore ne-
„ cessariamente da ciò molto viene illustra-
„ ta. Noi rimonteremo con molta atten-
„ zione alle cagioni, per cui ogni equa-
„ zione di secondo grado ammette una
„ doppia soluzione; elleno senza dubbio
„ contengono una proprietà essenziale di
„ queste equazioni. „

*R.* Noi possiamo dire in senso contrario a quello del signor *Euler*: abbiamo veduto sufficientemente dall' anzidetto, che le equazioni di secondo grado non hanno più di una sola incognita, e non sono suscettibili che di una sola soluzione (50). Questa proprietà merita per tutti i riguardi d'essere

esaminata, perchè la natura delle equazioni di grado superiore necessariamente da ciò molto viene illustrata. Noi rimonteremo adunque con più d' attenzione alle cagioni, onde ogni equazione di secondo grado, che si risolve in un solo valore, non ammette che una sola souzione.

Una delle principali cagioni, e la più generale, che si estende a tute le equazioni superiori al primo grado, si è l'unità del moltiplicando in un prodoto, o l'unità della radice in una potenza qalunque. Se adunque le equazioni superioi non sono altra cosa, che prodotti, e ptenze, come di leggieri si prova, esse nor conterranno che una sola radice; invanc pertanto si cercano due radici in un' eqazione di secondo grado, tre in una de terzo, ec.

57

Pag. 577. n. 690. „ Egli è vero, che „ noi abbiamo già veduto che questa „ doppia soluzione nasce d ciò, che la „ radice quadrata di un qulunque numero può essere presa per psitiva, e negativa. „

*R*. Dalla dimostrazione dla moltiplicazione dei segni data dal sigr *Euler* si vede cosa debba dirsi di quesl doppia soluzione.

,, Frattanto ſiccome queſto principio non ,, applicherebbeſi di leggieri alle equazio- ,, ni di dimenſioni più elevate, ſarà bene ,, di ſviluppare chiaramente la ſteſſa pro- ,, prietà ancora in un' altra maniera. Noi ,, prenderemo per eſempio l' équazione del ,, ſecondo grado $x^2 = 12x - 35$, e dare- ,, mo una nuova ragione, per cui queſta ,, equazione è riſolvibile in due maniere, ,, ammettendo per $x$ i due valori 5, e 7, ,, che ugualmente vi ſoddisfanno. ,,

*R.* Il sig. *Euler* non contento di aver tirata la ſua doppia ſoluzione da un errore di principio, ſi propone di rinforzarla collo ſviluppamento di una proprietà, che non eſiſte; cioè che l' equazione $x^2 = 12x - 35$ ſia ſuſcettibile di due ſoluzioni, ammettendo per la ſteſſa quantità $x$ i due valori 5, e 7, il che vuol dire, che $x = 5$, ed $x$ non $= 5$, poichè $x = 7$. Sarà eternamente impoſſibile a concepirſi come una grandezza indeterminata, avendo ricevuta la ſua determinazione, e per conſeguenza eſſendo fiſſata a rappreſentare, ed uguagliare una grandezza, o numero ſingolare, ed individuo, come ſarebbe 5, poſſa ancora rappreſentare, ed uguagliare il numero 7 (55).

Che se dicasi non essere il medesimo $x$, dunque non si può dire, che abbia due valori. Il sign. *Euler* dir potrebbe: l'equazione $x^2 = 12x - 35$ rappresenta le due equazioni $xx = 60 - 35$, ed $x' x' = 84 - 35$, le cui radici sono $x = 5$ per la prima, ed $x' = 7$ per la seconda equazione. Ma in tal caso non è il medesimo $x$ che rappresenta, ed è uguale $a$ 5, ed $a$ 7.

59

Pag. 577. n. 691. ,, E' più conveniente ,, al nostro uopo di cominciare a trasportare i termini dell'equazione, di maniera che uno dei membri diventi $= 0$; ,, questa equazione prende per conseguenza la forma: $x^2 - 12x + 35 = 0$. Si tratta ora di trovare un numero tale, che sostituito ad $x$, la formola $x^2 - 12x + 35$ si riduca effettivamente a 0. Dopo ciò ,, sarà questione di far vedere come ciò ,, possa farsi in due maniere. ,,

*R.* Ogni prodotto non essendo composto che di un solo moltiplicando ripetuto tante volte quante unità contiene il moltiplicatore, egli è chiaro, che supponendo il moltiplicando $= 0$, il prodotto sarà $= 0$, e siccome in un prodotto ogni moltiplicatore può divenire moltiplicando, vi saranno

tanti prodotti = o, quanti ſaranno i fattori. Le equazioni di ſecondo grado riſultando da due fattori, debbono per conſeguenza riſolverſi in due prodotti, quando non ſono trasformati in equazione, che ſia potenza perfetta, perchè un' equazione, che ſia potenza perfetta, non può avere che una ſola radice.

L' equazione $x^2 - 12x + 35 = 0$ propoſta dal signor *Euler* è un' equazione prodotta da due fattori, ſicchè $x^2$ non è un quadrato, e degli $12x$ componenti il ſecondo termine, ſonovi 5 che vagliono 7, e 7, che vagliono 5. Il terzo termine, che nelle potenze perfette è ſempre un quadrato, è in queſta il prodotto dei due fattori.

Sia $s$ la ſomma di due quantità, $p$ il loro prodotto, $d$ la loro differenza, sarà generalmente la maggiore, che ſi chiami $x = \frac{1}{2} s + \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - p}$, e la minore, che ſi chiami $y = \frac{1}{2} s - \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - p}$. Se la differenza ſia = o, i fattori divengono uguali, ed è il caſo delle equazioni, che ſono potenze perfette.

Pag. 578. n. 692. „ Ora il tutto con-
„ fiste nel far vedere chiaramente, che una
„ quantità della forma $x^2 - 12x + 35$,
„ può essere considerata come il prodotto
„ di due fattori; così in effetto la formo-
„ la, di cui parliamo, è composta dei due
„ fattori $(x - 5) \cdot (x - 7)$; imperciocchè
„ dovendosi questa quantità ridurre a o,
„ bisogna ancora, che il prodotto $(x - 5)$.
„ $(x - 7) = 0$; ma un prodotto di qual-
„ sivoglia numero di fattori sia composto,
„ diventa $= 0$ anche allorquando un solo
„ de' suoi fattori diventa $= 0$. Questo è
„ un principio fondamentale, a cui biso-
„ gna fare attenzione, soprattutto quando
„ si tratta di equazioni di molti gradi. „

*R.* Il signor *Euler* riconosce le equazioni superiori al primo grado per veri prodotti, che diventano $= 0$ per la sostituzione di uno dei fattori $= 0$, perchè le ripetizioni di o sono sempre $= 0$; e che un' equazione qualunque di un grado *n* è composta di un solo fattore col nome di radice, e delle ripetizioni di questa radice. Noi vedremo come l' Autore confonde l' equazione prodotto $x^2 - 12x + 35$, in cui $x^2$ non è un quadrato con l'equazione, che è

potenza perfetta $x^2 - 12x + 36 = 36 - 35$, in cui $x^2$ è un vero quadrato, ed i $12x$, che compongono il secondo termine, sono tutti del medesimo valore $= 6$.

61

Pag. 583. n. 698. „ Sarà cosa agevolissima dopo di ciò, che detto abbiamo, „ il formare equazioni di secondo grado, „ che contengano due valori dati ad arbitrio. Si cerca, per esempio, un'equazione tale, che l'uno dei valori di $x$ sia „ 7, e l'altro sia $-3$. Si facciano le due „ equazioni $x = 7$, $x = -3$, e quindi „ $x - 7 = 0$, $x + 3 = 0$; avremo in questa guisa i fattori dell'equazione ricercata, la qual diviene $x^2 - 4x - 21 = 0$. „ Applicandovi la regola data di sopra, „ si troveranno i due valori di $x$ supposti: „ $x = 2 \pm \sqrt{25}$, cioè $x = 7$, $x = -3$. „

*R.* Egli è manifesto, che l'equazione, da cui il signor *Euler* ha estratto i due valori di $x$, è l'equazione, che è potenza perfetta $x^2 - 4x + 4 = 21 + 4$, in cui $x^2$ rappresenta un vero quadrato, siccome è anche un vero quadrato il primo membro dell'equazione, la cui radice $x - 2 = \sqrt{25}$; onde $x = 2 + \sqrt{25}$, non già $x = 2 - \sqrt{25}$, non potendo aver luogo il segno $-$ della

formola; ſicchè il signor *Euler* prova il contrario di quel, che ſi era propoſto di provare, cioè $x = 2 \pm \sqrt{25}$, non potendo una potenza eſſere compoſta di due ſpecie inſociabili, e deſtruentiſi.

62

Pag. 584. n. 700. „ Un caſo da rimar-
„ carſi ſoprattutto, e che qualche volta ar-
„ riva, ſi è quello, in cui i due valori di
„ $x$ divengono immaginarj, od impoſſibili;
„ imperciocchè egli è tutto affatto impoſ-
„ ſibile allora d'aſſegnare ad $x$ un valore
„ tale, che ſoddisfaccia all'equazione. Sia
„ propoſto per eſempio di dividere il nu-
„ mero 10 in due parti, di maniera che
„ il loro prodotto ſia 30. Se chiamiamo
„ $x$ una di queſte parti, l'altra ſarà $10 - x$,
„ ed il loro prodotto ſarà $10x - x^2 = 30$;
„ dunque $x^2 = 10x - 30$, ed $x = 5 \pm$
„ $\sqrt{-5}$, numero immaginario, che dà a
„ divedere eſſere la dimanda impoſſibile.

*R*. Ognun vede, che per la prop. 5 del 2.° lib. d'Euclide il maſſimo rettangolo, che poſſa farſi di una linea, o qualunque quantità diviſa in due parti, ſi è il quadrato della metà; ſicchè quando il signor *Euler* propone il numero 10 da dividerſi in due parti tali, che il loro prodotto ſia

$=30$, manifestamente si vede essere impossibile, non potendo questo prodotto essere $> 25$. Dunque l' impossibilità non deriva dall' estrazione della radice quadrata, ma è già tal cosa impossibile avanti detta estrazione.

63

Si cerchino due quantità, la cui somma sia $=a$, e la somma dei quadrati $=b$. Sia $x$ una delle quantità ricercate, sarà l'altra $= a - x$, dunque per la condizione, sarà $2x^2 - 2ax + a^2 = b$; $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{4}$; dunque $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{b}{2} - \frac{a^2}{4}}$; quindi se $b < \frac{a^2}{2}$, il valore di $x$ è immaginario.

Se noi ci lasciamo trasportare dal calcolo diremo subito, che l' impossibilità nella detta supposizione deriva dall' estrazione della radice quadrata, ma considerando la cosa più intimamente ne daremo altro giudicio.

Di fatti per la prop. 9. del 2.° d' Euclide, se una retta (o qualunque quantità) sarà divisa per metà, e non per metà, saranno i quadrati delle parti disuguali doppj dei quadrati della metà, e della parte

intermedia; dunque la somma dei quadrati, almeno quando le parti diventano tra di loro uguali, debbe uguagliare il doppio del quadrato della metà; sicchè prima dell' estrazione della radice quadrata, deve essere $b >$, od almeno $= \frac{a^2}{2}$, quindi se $b < \frac{a^2}{2}$, già prima dell' estrazione della radice quadrata, l' espressione è immaginaria, essendosi da una quantità sottratto quel, che non conteneva, il che è assurdo.

64

Sia da costruirsi la formola $bx - x^2 = cd$. Nel circolo $PNF$ (fig. 3.) si adattino le corde $PG = b$, $PF = c + d$, da $PF$ si seghi la parte $PD$, od $EF = d$. Se, fatto centro in $C$ coll' intervallo $CE$, descrivasi il circolo, saranno $PO$, $PH$ fattori dell' equazione $bx - x^2 = cd$; imperciocchè pel cor. 1. della 36. del 1.° d' Euclide $PE.PD = PO.PH$, cioè $dc = bx - x^2$.

Se la retta $PN$ non segherà il circolo, allora i due fattori, o radici $b - x$, ed $x$ saranno immaginarie, perchè sarà $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - cd}$, ove se $cd > \frac{b^2}{4}$ le due radici sono immaginarie.

E' cosa certa essere in tal caso le radici immaginarie, ma non diventano tali per via dell' estrazione della radice quadrata, ma lo erano prima, sicchè ripugnava $bx - x^2 = cd$.

Infatti per la prop. 36. del 3.° d' Euclide, abbiamo $cd = PL^2$, e per la 3. del medesimo lib. $PL = LM$, e per la 15 dello stesso lib. $PN < PM$. Per l' altra parte per la prop. 5. del 2.° lib. il massimo rettangolo fatto dai segamenti di una retta si è il quadrato della metà di essa retta; dunque essendo $PN < PM$, ed il quadrato della metà $PM$ essendo $= cd$, sarà il quadrato della metà di $PN$, e molto più qualunque rettangolo fatto dai segamenti della $PN$ segato in parti disuguali $< \overline{PL}^2$, che è $= cd$.

Pertanto prima dell' estrazione della radice quadrata già era $(b - x) . x = cd$ un' equazione impossibile, supponendosi la retta $PN$ divisa in due parti tali, che il rettangolo fatto da esse sia maggiore del massimo, che è il quadrato della metà.

65

Nel circolo $AE\ BF$ (fig. 4) sia il diametro $AB = 2a$, prese le ascisse dal vertice $A$, avremo $2ax - x^2 = y^2$, e $y =$

$\sqrt{2ax-x^2}$. Se $x>2a$, le $y$ secondo il calcolo sono immaginarie. Ora ciò avviene perchè da $2a$ si leva $x$, che è $>2a$, il che ripugna. Che se da $x$ si levi $2a$, allora $y=\sqrt{x^2-2ax}=ME$, od $MF$, quantità reale per la prop. 36. del 3.° d'Euclide.

La stessa verità si fa palese, prendendo le ascisse dal centro, e l'equazione sia $a^2-x^2=y^2$, perchè se $x>a$, l'equazione fa passaggio in quest' altra $x^2-a^2=y^2$, e le $y$ sono le tangenti $ME$, $MF$ per la prop. 6. del 2.°, e 18, e 36 del 3.° di Euclide.

66

Il medesimo accade nelle altre sezioni coniche per via della loro comune proprietà col cerchio, per cui, se due rette incontratesi segano la linea del secondo ordine in due punti, il rettangolo fatto dalla parte dell' una (intercetta tra il punto d' intersezione, ed il ramo della curva) nell'altra parte, che dal medesimo termina all' altro ramo della curva, ha una ragione costante al rettangolo fatto dalle due parti dell' altra retta, nella guisa medesima determinate.

67

Pag. 587. n. 703. „ Egli è adunque un
„ punto fuori d'ogni contesa, che ogni equa-
„ zione del secondo grado contiene necessa-
„ riamente due valori di $x$, e che ve ne
„ possono essere nè meno, nè più di due.„

*R.* Egli è fuor d'ogni dubbio, che un' incognita non può avere più di un valore; che le equazioni prodotti del secondo grado a due incognite $x$, $y$, si risolvono in due prodotti, o equazioni, in cui ciascuna incognita aggiunta alla metà della somma è moltiplicando del prodotto, o radice dell'equazione, che l'incognita maggiore è uguale alla metà della somma più la metà della differenza dei due fattori; e la minore delle incognite è uguale alla metà della somma meno la metà della differenza.

Se i due fattori sono uguali; allora $x+y=x+x=a+a$, ed $x^2=a^2$, $x=\sqrt{a^2}=a$; e questo è il caso delle equazioni, che sono potenze perfette.

68

Pag. 591. n. 709. ec. „ Consideriamo,
„ per esempio, l'equazione $x^3=8$ con in-
„ tenzione di trovare tutti i numeri, dei quali

„ il cubo è 8 . . . Oltre il caso, in cui „ $x = 2$, che soddisfa all' equazione $x^3 = 8$; „ noi abbiamo ancora due altri valori di $x$, „ dei quali i cubi sono parimenti 8, e que„ sti sono $x = -1 + \sqrt{-3}$, ed $x = -1$ „ $-\sqrt{-3}$. Non vi sarà più dubbio alcuno, „ se si prendano i cubi effettivamente co„ me quì si vede:

$$\begin{array}{r}
-1 + \sqrt{-3} \\
-1 + \sqrt{-3} \\
\hline
1 - \sqrt{-3} \\
-\sqrt{-3} - 3 \\
\hline
-2 - 2\sqrt{-3} \\
-1 + \sqrt{-3} \\
\hline
2 + 2\sqrt{-3} \\
-2\sqrt{-3} + 6 \\
\hline
8 \text{ cubo.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
-1 - \sqrt{-3} \\
-1 - \sqrt{-3} \\
\hline
1 + \sqrt{-3} \\
+\sqrt{-3} - 3 \\
\hline
-2 + 2\sqrt{-3} \\
-1 - \sqrt{-3} \\
\hline
2 - 2\sqrt{-3} \\
+2\sqrt{-3} + 6. \\
\hline
8 \text{ cubo.}
\end{array}$$

*R.* Abbiamo già veduto (48) cosa debba dirsi del cubo di $-1 + \sqrt{-3}$.

Il secondo esempio non è meno peccante del primo. Un' occhiata all' espressione della radice basta per darne giudizio. $-\sqrt{-4}$ è $= -2$ (49), e $-1 - \sqrt{-4}$ è $= -1 + 2$ $= 1$, di cui il cubo è $= 1$.

Ora $-1 - \sqrt{-3}$ è $< -1 - \sqrt{-4}$, conseguentemente $< 1$; come può essere

pertanto, che il cubo di un numero $< 1$ possa essere $= 8$? Dare, e sottommettersi a siffatte regole di calcolo, è un dimenticarsi d' essere ragionevole.

69

Che la direzione delle linee sia male espressa dai segni +, e — (5), e mal calcolata si vede manifestamente dall'esempio seguente, per tacere d' altri molti.

Diasi il cerchio, il cui raggio sia $= a$ (fig. 5) il raggio in dirittura sarà $-a$, ed il raggio perpendicolare $= \sqrt{-a^2}$, quantità immaginaria secondo gli Algebristi, reale secondo Euclide.

70

Quand' anche si potesse, e dovesse la direzione notare coi segni +, e —; egli è errore manifesto il dire, che non si danno più di due stati, o direzioni; essendo che da un punto preso come centro, infinite sono le direzioni contrarie, che dovrebbero segnarsi coi segni +, e — con infinita varietà di significazione.

71

Da ciò, che si è detto (62. ec.) si vede cosa debba dirsi del caso irreduttibile così celebre nell' Algebra; derivando l'impossibilità da ciò, che si suppone una quantità divisa in due parti, sicchè il prodotto

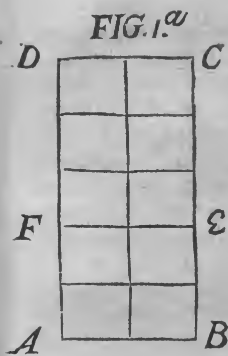
di esse parti sia maggiore del massimo (siccome ha già dimostrato il celeb. sig. Michelotti Professore degn.$^{mo}$ della R. Università di Torino, e mio Maestro) contro la prop. 5. del 2.° d' Euclide. In generale dai principj falsi, ragionando conseguentemente non possono dedursi che false illazioni, come abbiamo osservato nel celeb. signor *Euler*, e si può vedere negli altri Algebristi, e principalmente moderni.

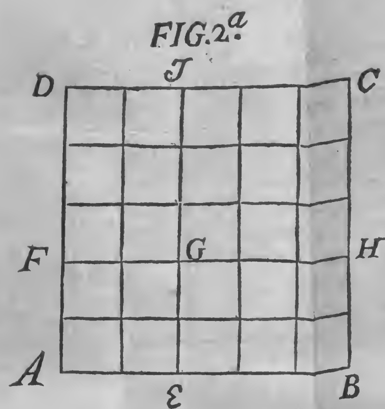
Dal sinquì detto parmi di poter conchiudere coll' eruditissimo, ed ingegnosissimo Guglielmo Gottofredo *Leibnitz* . . . „ Ex „ quibus intelligitur in ipsis rei analyticæ „ fundamentis aliqua adhuc neglecta fuisse. „ *Com. epistoli. epist.* 205.

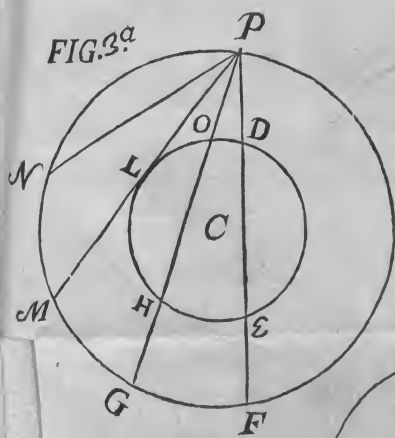
## DISSERTAZIONE II.

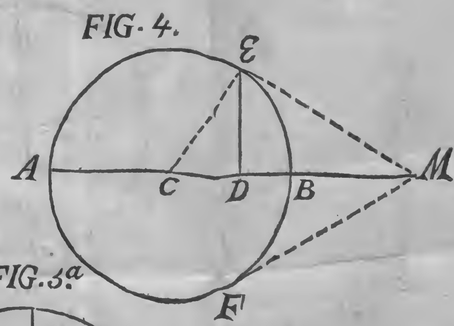
### *Consenso del Calcolo differenziale col Calcolo delle quantità finite.*

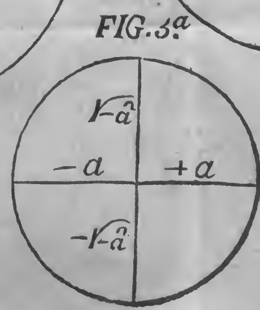
Proposizione prima. Se un dato numero si moltiplichi pel medesimo numero accresciuto, o diminuito di un' unità, e questo parimenti si moltiplichi per se stesso accresciuto, o diminuito di un' unità ec. le differenze prime formeranno una progressione aritmetica, in cui le differenze dei termini saranno = 2; sicchè le differenze seconde saranno costanti = 2 = 1 . 2.


FIG. 1.ª
D
C
F
E
A
B


FIG. 2.ª
D
J
C
F
G
H
A
E
B


FIG. 3.ª
P
O
D
N
L
C
M
H
E
G
F


FIG. 4.
E
A
C
D
B
M
F


FIG. 5.ª
−a
+a

ni ſaranno $= 2$; ſicchè le differenze ſeconde ſaranno coſtanti $= 2 = 1 . 2$.

## ESEMPJ

| Prod. | dif. 1. | dif. 2. |
|---|---|---|
| 1.2 = 2 | | |
| | 4 | |
| 2.3 = 6 | | 2 |
| | 6 | |
| 3.4 = 12 | | 2 |
| | 8 | |
| 4.5 = 20 | | 2 |
| | 10 | |
| 5.6 = 30 | | 2 |
| | 12 | |
| 6.7 = 42 | | 2 |
| | 14 | |
| 7.8. = 56 | | |
| ec. | | |

| Prod. | dif. 1. | dif. 2. |
|---|---|---|
| $d.(d+1)=d^2+d$ | | |
| | $2d+2$ | |
| $(d+1).(d+2)=d^2+3d+2$ | | 2 |
| | $2d+4$ | |
| $(d+2).(d+3)=d^2+5d+6$ | | 2 |
| | $2d+6$ | |
| $(d+3).(d+4=d^2+7d+12$ | | 2 |
| | $2d+8$ | |
| $(d+4).(d+5)=d^2+9d+20$ | | 2 |
| | $2d+10$ | |
| $(d+5).(d+6)=d^2+11d+30$ | | |

Abbiasi $x^2 \pm x$, sarà la differenza prima $2xdx \pm dx$, e la differenza seconda $= 2dx^2$ uguale al quadrato della differenza X per 2.

Scolio 1.° Se gli esempj si prendano dal basso in sù, si dimostra la parte della prop., in cui il numero dato successivamente si scema, siccome dall' alto in basso provano la prima parte della proposizione. Lo stesso intendasi negli altri esempj.

Scolio 2.° Manifesta cosa è doversi il numero, o quantità superiore sottrarsi dall' inferiore per non discendere alle quantità negative.

Prop. 2. Se un dato numero s'accresca, o diminuisca per gradi di una, due, tre ec. unità, e dal dato numero incominciando si moltiplichino a tre a tre, dimodochè i due ultimi fattori di un prodotto siano sempre fattori del seguente prodotto; le differenze seconde formeranno una progressione aritmetica, in cui le differenze dei termini $= 6$; e le differenze terze sono costanti $= 6 = 1.2.3.$

# ESEMPJ

| *Prod.* | dif. 1 | dif. 2 | dif. 3 |
|---|---|---|---|
| 1.2.3= 6 | | | |
| | 18 | | |
| 2.3.4= 24 | | 18 | |
| | 36 | | 6 |
| 3.4.5= 60 | | 24 | |
| | 60 | | 6 |
| 4.5.6=120 | | 30 | |
| | 90 | | 6 |
| 5.6.7=210 | | 36 | |
| | 126 | | |
| 6.7.8=236 | | | |

| *Prod.* | dif. 1 | dif. 2 | dif. 3. |
|---|---|---|---|
| $d.(d+1).(d+2)=d^3+3d^2+2d$ | | | |
| | $3d^2+9d+6$ | | |
| $(d+1)(d+2)(d+3)=d^3+bd^2+11d+6$ | | $6d+12$ | |
| | $3d^2+15d+18$ | | 6 |
| $(d+2)(d+3)(d+4)=d^3+9d^2+25d+24$ | | $6d+18$ | |
| | $3d^2+21d+36$ | | 6 |
| $(d+3)(d+4)(d+5)=d^3+12d^2+47d+60$ | | $6d+24$ | |
| | $3d^2+p27+60$ | | |
| $(d+4)(d+5)(d+6)=d^3+15d^2+47d+120$ | | | |

Sia $x^3 \pm mx^2 \pm nx$, sarà la differenza prima $3x^2dx \pm 2mxdx \pm ndx$; la differenza seconda $6x^2dx^2 \pm 2mdx^2$; le differenze terze costanti $=6dx^3 = 1.2.3.dx^3$.

Prop. 3. Se un dato numero si accresca, o diminuisca di una, due ec. unità, come nella prop. antecedente, e si moltiplichino a quattro a quattro, sicchè i tre ultimi fattori di un prodotto siano i tre primi del prodotto seguente; le differenze terze formeranno una progressione aritmetica, in cui le differenze sono $=24$; onde le differenze quarte sono costanti $=24=1.2.3.4$.

## ESEMPJ

| Prod. | dif. 1 | dif. 2 | dif. 3 |
|---|---|---|---|
| 1.2.3.4. = 24 | | | |
| | 96 | | |
| 2.3.4.5. = 120 | | 144 | |
| | 240 | | 96 |
| 3.4.5.6. = 360 | | 240 | |
| | 480 | | 120 |
| 4.5.6.7. = 840 | | 360 | |
| | 840 | | 144 |
| 5.6.7.8. = 1680 | | 504 | |
| | 1344 | | |
| 6.7.8.9. = 3024 | | | |

| Prod. | dif. 1 | dif. 2 | dif. 3 | dif. 4 |
|---|---|---|---|---|
| $d.(d+1)(d+2)(d+3)=d^4+6d^3+11d^2+6d$ | | | | |
| | $4d^3+24d^2+44d+24$ | | | |
| $(d+1)(d+2)(d+3)(d+4)=d^4+10d^3+35d^2+50d+24$ | | $12d^2+60d+72$ | | |
| | $4d^3+36d^2+104d+96$ | | $24d+72$ | |
| $24(d+2)(d+3)(d+4)(d+5)=d^4+14d^3+71d^2+154d+120$ | | $12d^2+84d+144$ | | $24$ |
| | $4d^3+48d^2+188d+240$ | | $24d+96$ | |
| $24(d+3)(d+4)(d+5)(d+6)=d^4+18d^3+119d^2+342d+360$ | | $12d^2+168d+240$ | | |
| | $4d^3+60d^2+296d+480$ | | | |
| $(d+4)(d+5)(d+6)(d+7)=d^4+22d^3+179d^2+638d+840$ | | | | |
| ec. | | | | |

Sia $x^4$ (tralaſcio gli altri termini, perchè ſpariſcono differenziando), ſarà la differenza quarta $24dx^4 = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ dx^4$.

Propoſ. 4. In generale ſe un dato numero $n$ ſi accreſca, o diminuiſca gradatamente d' un' unità, ed i fattori di numero $m$ (ſecondo il ſenſo della prop. anteced.) ſi moltiplichino fra di loro, le differenze $\overline{m-1}$ eſime formeranno una progreſſione aritmetica, in cui le differenze dei termini ſaranno $= m.(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$ ec. ſino all' unità, e le differenze $m$ eſime ſaranno coſtanti $= m.(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$ inſino ad $1.^m$

Sia $x^m$, ſarà la differenza $m$ eſima $= m.(m-1)(m-2)(m-3)$ ec. $dx^m$.

Prop. 5. Le differenze ſeconde dei quadrati dei numeri naturali ſono coſtanti $= 2 = 1^2.\ 2.$

## ESEMPJ

| Num. | quad. | dif. 1. | dif. 2. | quant. $d$ | $d^2$ quad. | dif. 1. | dif. 2. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1. | | | $d$ | $d^2$ | | |
| | | 3 | | | | $2d+1$ | |
| 2. | 4. | | 2 | $d+1$ | $d^2+2d+1$ | | 2 |
| | | 5 | | | | $2d+3$ | |
| 3. | 9. | | 2 | $d+2$ | $d^2+4d+4$ | | 2 |
| | | 7 | | | | $2d+5$ | |
| 4. | 16. | | 2 | $d+3$ | $d^2+6d+9$ | | 2 |
| | | 9 | | | | $2d+7$ | |
| 5. | 25. | | 2 | $d+4$ | $d^2+8d+16$ | | 2 |
| | | 11 | | | | $2d+9$ | |
| 6. | 36. | | | $d+5$ | $d^2+10d+25$ | | |

Sia $x^2$, la differenza prima ſarà $2xdx$, la differenza ſeconda $= 2dx^2 = 2 . dx^2$.

Propoſ. 6. Le differenze terze dei cubi dei numeri naturali ſono coſtanti $= 6 = 1^3 . 2 . 3$.



## ESEMPJ

| Num. | cubi | dif. 1. | dif. 2. | dif. 3. | q. $d$ | $d^3$ cubi | dif. 1. | dif. 2. | dif. 3. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | $d$ | $d^3$ | | | |
| | | 7 | | | | | $3d^2+3d+1$ | | |
| 2 | 8 | | 12 | | $d+1$ | $d^3+3d^2+3d+1$ | | $6d+6$ | |
| | | 19 | | 6 | | | $3d^2+9d+7$ | | 6 |
| 3 | 27 | | 18 | | $d+2$ | $d^3+6d^2+12d+8$ | | $6d+12$ | |
| | | 37 | | 6 | | | $3d^2+15d+19$ | | 6 |
| 4 | 64 | | 24 | | $d+3$ | $d^3+9d^2+27d+27$ | | $6d+18$ | |
| | | 61 | | | | | $3d^2+21d+37$ | | 6 |
| 5 | 125 | | | | $d+4$ | $d^3+12d^2+48d+64$ | | $6d+24$ | |
| | | | | | | | $3d^2+27d+61$ | | |
| ec. | | | | | $d+5$ | $d^3+15d^2+75d+125$ | | | |

Sia $x^3$, ſarà la differenza prima $3x^2dx$, la ſeconda $6xdx^2$, la terza $6dx^3$ $= 1 . 2 . 3 . dx^3$.

Propoſ. 7. Le differenze quarte dei quadrato-quadrati dei numeri naturali ſono coſtanti $= 24 = 1^4 . 2 . 3 . 4$.

# ESEMPJ

| N. | qq. | dif. 1 | dif. 2. | dif. 3. | dif. 4. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| | | 15 | | | |
| 2 | 16 | | 50 | | |
| | | 65 | | 60 | |
| 3 | 81 | | 110 | | 24 |
| | | 175 | | 84 | |
| 4 | 256 | | 194 | | 24 |
| | | 369 | | 108 | |
| 5 | 625 | | 302 | | 24 |
| | | 671 | | 132 | |
| 6 | 1296 | | 434 | | |
| | | 1105 | | | |
| 7 | 2401 | | | | |

| d. | $d^4$ qq. | dif. | dif. 2 | dif. 3 | dif. 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $4d^3+6d^2+4d+1$ | | | |
| $d+1$ | $d^4+4d^3+6d^2+4d+1$ | | $12d^2+24d+14$ | $24d+36$ | |
| | | $4d^3+18d^2+28d+15$ | | | 24 |
| $d+2$ | $d^4+8d^3+24d^2+32d+16$ | | $12d^2+48d+50$ | $24d+60$ | |
| | | $4d^3+30d^2+76d+65$ | | | 24 |
| $d+3$ | $d^4+12d^3+54d^2+108d+81$ | | $12d^2+72d+110$ | $24d+84$ | |
| | | $4d^3+42d^2+148d+175$ | | | 24 |
| $d+4$ | $d^4+16d^3+96d^2+256d+256$ | | $12d^2+96d+194$ | $24d+108$ | |
| | | $4d^3+54d^2+244d+369$ | | | |
| $d+5$ | $d^4+20d^3+150d^2+500d+625$ | | $12d^2+120d+302$ | | |
| | | $4d^3+66d^2+364d+671$ | | | |
| $d+6$ | $d^4+24d^3+216d^2+864d+1296$ | | | | |

Sia $x^4$, ſarà la differenza prima $= 4x^3dx$, la ſeconda $= 12x^2d^2$, la terza $= 24xd^3$, la quarta $24dx^4 = 1 . 2 . 3 . 4 . dx^4$.

Propoſ. 8. Generalmente le differenze $n.^{esime}$ delle potenze dei numeri naturali, di cui l'indice è $n$, ſono coſtanti $= n. (n-1)(n-2)(n-3)$ ec. $1^n$.

Sia $x^n$, ſarà la differenza prima $= nx^{n-1} dx$, la ſeconda $= n. (n-1)x^{n-n} dx^2$ ed, e la differenza $n.^{esima} = n. (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ ec. $dx^n$.

Scolio. Egli è manifeſto, che non fa d'uopo, che i numeri, di cui ſi cercano le differenze delle potenze, abbiano principio dall' unità, ma poſſono cominciare da qualunque numero, e creſcere, o ſcemare.

Prop. 9. Se, principiando dall' unità, o da qualunque numero, ſi moltiplichino fra di loro due numeri (il ſecondo dell' antecedente prodotto ſia il primo fattore del ſeguente), che abbiano la medeſima differenza; le differenze ſeconde ſaranno coſtanti, ed eguali al doppio quadrato della detta differenza.

## ESEMPJ

| Prod. | dif. 1. | dif. 2. | |
|---|---|---|---|
| $1.3 = 3$ | | | |
| | 12 | | |
| $3.5 = 15$ | | 8 | |
| | 20 | | $= 2.4.$ |
| $5.7 = 35$ | | 8 | |
| | 28 | | |
| $7.9 = 63$ | | | |

| Prod. | dif. 1. | dif. 2. | |
|---|---|---|---|
| $1.4 = 4$ | | | |
| | 20 | | |
| $4.7 = 28$ | | 18 | |
| | 40 | | $= 2.9.$ |
| $7.10 = 70$ | | 18 | |
| | 60 | | |
| $10.13 = 130$ | | | |

| Prod. | dif. 1. | dif. 2. | |
|---|---|---|---|
| $1.5 = 5$ | | | |
| | 40 | | |
| $5.9 = 45$ | | 32 | |
| | 72 | | $= 2.16.$ |
| $9.13 = 117$ | | 32 | |
| | 104 | | |
| $13.17 = 221$ | | | |

*In generale*

| Prodotti | dif. 1 | dif. 2. | |
|---|---|---|---|
| $d.\ (d+n) = d^2 + dn$ | | | |
| | $2dn + 2n^2$ | | |
| $(d+n)(d+2n) = d^2+3dn+2n^2$ | | $2n^2$ | |
| | $2dn + 4n^2$ | | |
| $(d+2n)(d+3n) = d^2+5dn+6n^2$ | | $2n^2$ | $= 2.n^2$ |
| | $2dn + 6n^2$ | | |
| $(d+3n)(d+4n) = d^2+7dn+12n^2$ | | $2n^2$ | |
| | $2dn + 8n^2$ | | |
| $(d+4n)(d+5n) = d^2+9dn+20n^2$ | | | |

Sia $x^2$, la differenza feconda è $2.dx^2$.

Prop. 10. Se tre numeri ( cominciando dall' unità, o da qualunque numero ), i quali abbiano la medefima differenza, fi moltiplichino tra di loro ( ficchè i due ultimi fattori del prodotto antecedente fiano i due primi del feguente ), le differenze terze fono coftanti, ed uguali al feftuplo cubo della differenza affunta.

# ESEMPJ

| | Prod. | dif. 1 | dif. 2 | dif. 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. 3. 5. = | 15 | | | | |
| | | 90 | | | |
| 3. 5. 7. = | 105 | | 120 | | |
| | | 210 | | 48 | |
| 5. 7. 9. = | 315 | | 168 | | = 6 . 8. |
| | | 378 | | 48 | |
| 7. 9. 11. = | 693 | | 216 | | |
| | | 594 | | | |
| 9. 11. 13. = | 1287 | | | | |

| | Prod. | dif. 1. | dif. 2. | dif. 3. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. 4. 7. = | 28 | | | | |
| | | 252 | | | |
| 4. 7. 10. = | 280 | | 378 | | |
| | | 630 | | 162 | |
| 7. 10. 13. = | 910 | | 540 | | = 6 . 27. |
| | | 1170 | | 162 | |
| 10. 13. 16. = | 2080 | | 702 | | |
| | | 1872 | | | |
| 13. 16. 19. = | 3952 | | | | |

*In generale*

| | Prodotti | dif. 1 | dif. 2. | dif. 3. |
|---|---|---|---|---|
| $d.\ (d+n)(d+2n)$ | $= d^3+3d^2n+2dn^2$ | $3d^2n+9dn^2+6n^3$ | $6dn^2+12n^3$ | $6n^3$ |
| $(d+n)(d+2n)(d+3n)$ | $= d^3+6d^2n+11dn^2+6n^3$ | $3d^2n+15dn^2+18n^3$ | $6dn^2+18n^3$ | $6n^3 = 6 . n^3$ |
| $(d+2n)(d+3n)(d+4n)$ | $= d^3+9d^2n+26dn^2+24n^3$ | $3d^2n+21dn^2+36n^3$ | $6dn^2+24n^3$ | $6n^3$ |
| $(d+3n)(d+4n)(d+5n)$ | $= d^3+12d^2n+47dn^2+60n^3$ | $3d^2n+27dn^2+60n^3$ | $6dn^2+30n^3$ | |
| $(d+4n)(d+5n)(d+6n)$ | $= d^3+15d^2n+74dn^2+120n^3$ | $3d^2n+33dn^2+90n^3$ | | |
| $(d+5n)(d+6n)(d+7n)$ | $= d^3+18d^2n+107dn^2+210n^3$ | | | |

Sia $x^3$, farà la differenza terza $= 6 . dx^3$.

Prop. 11. Se quattro numeri comincianti dall' unità, o da altro numero, i quali ſiano egualmente differenti, ed i tre ultimi fattori dell' antecedente prodotto ſiano i tre primi del prodotto ſeguente, ſi moltiplicheranno tra di loro, le differenze quarte ſaranno coſtanti, ed uguali al vigecuplo quarto quadrato-quadrato dell' aſſunta differenza.

Sia $n$ la differenza aſſunta; ſaranno le differenze quarte coſtanti $= 24n^4 = 1 . 2 . 3 . 4 . n^4$.

## ESEMPJ

| | *Prod.* | dif. 1 | dif. 2 | dif. 3 | dif. 4. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. 3. 5. 7. = | 105 | | | | |
| | | 840 | | | |
| 3. 5. 7. 9. = | 945 | | 1680 | | |
| | | 2520 | | 1344 | |
| 5. 7. 9. 11. = | 3465 | | 3024 | | 384 |
| | | 5544 | | 1728 | |
| 7. 9. 11. 13. = | 9009 | | 4752 | | 384 = 24 . 16 = 1 . 2 . 3 . 4 . 16. |
| | | 10296 | | 2112 | |
| 9. 11. 13. 15. = | 19305 | | 6864 | | 384 |
| | | 17160 | | 2496 | |
| 11. 13. 15. 17. = | 36465 | | 9360 | | |
| | | 27520 | | | |
| 13. 15. 17. 19. = | 62985 | | | | |

| *In generale* | *Prodotti* | dif. 1 | dif. 2. | dif. 3. | dif. 4. |
|---|---|---|---|---|---|
| d. $(d+n)(d+2n)(d+3n)$ | $= d^4+6nd^3+11n^2d^2+6n^3d$ | | | | |
| | | $4nd^3+24n^2d^2+44n^3d+24n^4$ | | | |
| $(d+n)(d+2n)(d+3n)(d+4n)$ | $= d^4+10nd^3n+35n^2d^2+50n^3d+24n^4$ | | $12n^2d^2+60n^3d+72n^4$ | | |
| | | $4nd^3+36n^2d^2+104n^3d+96n^4$ | | $24n^3d+72n^4$ | |
| $(d+2n)(d+3n)(d+4n)(d+5n)$ | $= d^4+14nd^3+71n^2d^2+154n^3d+120n^4$ | | $12n^2d^2+84n^3d+144n^4$ | | $24n^4$ |
| | | $4nd^3n+48n^2d^2+188n^3d+240n^4$ | | $24n^3d+96n^4$ | |
| $(d+3n)(d+4n)(d+5n)(d+6n)$ | $= d^4+18nd^3+119n^2d^2+342n^3d+360n^4$ | | $12n^2d^2+108n^3d+240n^4$ | | $24n^4 = 1 . 2 . 3 . 4 . n^4$ |
| | | $4nd^3n+60n^2d^2+296n^3d+480n^4$ | | $24n^3d+120n^4$ | |
| $(d+4n)(d+5n)(d+6n)(d+7n)$ | $= d^4+22nd^3+179n^2d^2+638n^3d+840n^4$ | | $12n^2d^2+132n^3d+360n^4$ | | $24n^4$ |
| | | $4nd^3+72n^2d^2+428n^3d+840n^4$ | | $24n^3d+144n^4$ | |
| $(d+5n)(d+6n)(d+7n)(d+8n)$ | $= d^4+26nd^3+251n^2d^2+1066n^3d+1680n^4$ | | $12n^2d^2+156n^3d+504n^4$ | | |
| | | $4nd^3+84n^2d^2+584n^3d+1344n^4$ | | | |
| $(d+6n)(d+7n)(d+8n)(d+9n)$ | $= d^4+30nd^3+335n^2d^2+1650n^3d+3024n^4$ | | | | |

Sia $x^4$, sarà la differenza prima $= 4x^3dx$, la differenza seconda $= 12x^2dx^2$; la differenza terza $= 24xdx^3$; la differenza quarta $= 24dx^4$.

Prop. 12. Se cinque numeri, da qualunque numero principianti, avanti la medesima differenza, sicchè i quattro ultimi fattori dell' antecedente prodotto, siano i quattro primi del prodotto seguente, si moltiplicheranno tra di loro, le differenze quinte saranno costanti = 120 X pel supersolido primo della differenza assunta.

# ESEMPIO GENERALE.

*Prodotti*

$$d. \quad (d+n)(d+2n)(d+3n)(d+4n) = d^5+10nd^4+35n^2d^3+50n^3d^2+24n^4d$$

$$(d+n)(d+2n)(d+3n)(d+4n)(d+5n) = d^5+15nd^4+85n^2d^3+225n^3d^2+274n^4d+120n^5$$

$$(d+2n)(d+3n)(d+4n)(d+5n)(d+6n) = d^5+20nd^4+155n^2d^3+580n^3d^2+1044n^4d+720n^5$$

$$(d+3n)(d+4n)(d+5n)(d+6n)(d+7n) = d^5+25nd^4+245n^2d^3+1175n^3d^2+2754n^4d+2520n^5$$

$$(d+4n)(d+5n)(d+6n)(d+7n)(d+8n) = d^5+30nd^4+355n^2d^3+2070n^3d^2+5944n^4d+6720n^5$$

$$(d+5n)(d+6n)(d+7n)(d+8n)(d+9n) = d^5+35nd^4+485n^2d^3+3325n^3d^2+11274n^4d+15120n^5$$

$$(d+6n)(d+7n)(d+8n)(d+9n)(d+10n) = d^5+40nd^4+635n^2d^3+5000n^3d^2+19524n^4d+30240n^5$$

differ. 1.

$$5nd^4+50n^2d^3+175n^3d^2+250n^4d+120n^5$$

$$5nd^4+70n^2d^3+355n^3d^2+770n^4d+600n^5$$

$$5nd^4+90n^2d^3+595n^3d^2+1710n^4d+1800n^5$$

$$5nd^4+110n^2d^3+895n^3d^2+3190n^4d+4200n^5$$

$$5nd^4+130n^2d^3+1255n^3d^2+5330n^4d+8400n^5$$

$$5nd^4+150n^2d^3+1675n^3d^2+8250n^4d+15120n^5$$

differ. 2.

$$20n^2d^3+180n^3d^2+520n^4d+480n^5$$

$$20n^2d^3+240n^3d^2+940n^4d+1200n^5$$

$$20n^2d^3+300n^3d^2+1480n^4d+2400n^5$$

$$20n^2d^3+360n^3d^2+2140n^4d+4200n^5$$

$$20n^2d^3+420n^3d^2+2920n^4d+6720n^5$$

differ. 3.

$$60n^3d^2+420n^4d+720n^5$$

$$60n^3d^2+540n^4d+1200n^5$$

$$60n^3d^2+660n^4d+1800n^5$$

$$60n^3d^2+780n^4d+2520n^5$$

differ. 4.

$$120n^4d+480n^5$$

$$120n^4d+600n^5$$

$$120n^4d+720n^5$$

diff. 5.

$$120n^5$$

$$120n^5$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^5.$$

Sia $x^5$, farà la differenza quinta $= 120 \,.\, dx^5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot dx^5$

Propof. 13. In generale fe un dato numero fi accrefca, o diminuifca fucceffivamente della differenza data $d$, e i fattori $n$ di numero fi moltiplichino tra di loro (come nella propof. antec.), ficchè fattori ultimi $n-1$ dell' antecedente prodotto fiano fattori primi del prodotto feguente, le differenze $n$.$^{\text{efime}}$ faranno coftanti $= n.\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$ ec. . . . $d^n$.

Così di $x^n$ la differenza $n$.$^{\text{efima}}$ è $= n.\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$ ec. . . . $1 \,.\, dx^n$.

# DISSERTAZIONE III.

*Metodo per determinare nelle curve la ragione delle coordinate, dalla ragione della differenza delle coordinate fra di loro, ovvero dell' una, o l' altra, o di amendue insieme coll' arco corrispondente.*

## *Saggio nelle Sezioni Coniche.*

### Nel Circolo.

Proposizione prima. La differenza dell' ordinata sta alla differenza dell' arco :: $x:a$, cioè come l' ascissa al raggio.

Sia il raggio del circolo $=a$, prese le ascisse dal centro, avremo l' equazione al circolo $y^2=a^2-x^2$.

Dovendo per ipotesi essere $dy:\sqrt{dx^2+dy^2}$ (la differenza dell' ordinata alla differenza dell' arco corrispondente) $::m:n$; sarà l' equazione differenziale $ndy=m\sqrt{dx^2+dx^2}$

Ora dall'equazione $y^2 = a^2 - x^2$ si ricava $dx = \frac{-ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}$, $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2-y^2}$. Sostituiscasi in vece di $dx^2$ il suo valore, ed avremo l' equazione $ndy = m \sqrt{\frac{y^2dy^2}{a^2-y^2} + dy^2}$, ovvero $ndy = \frac{m\,a\,d\,y}{\sqrt{a^2-y^2}}$, e dividendo per $dy$, ed in vece di $\sqrt{a^2-y^2}$, sostituendo $x$, avrassi $nx = ma$; e quindi $x : a :: m : n$, cioè la differenza dell' ordinata sta alla differenza dell' arco corrispondente come l'ascissa al raggio.

Corollario primo. Se $m = n$, $x = a$, vale a dire la differenza dell' ordinata uguaglia la differenza dell' arco sul principio dell' arco medesimo, o più veramente non l' uguaglia giammai, essendo ivi le dette differenze $= 0$.

Corollario 2. Dunque la ragione della differenza dell' arco alla differenza dell' ordinata cresce dal principio dell' arco, ossia diametro sino al centro, ed ivi abbiamo un massimo; imperciocchè essendo ivi $x = 0$, $a : x$ ha una ragione infinitamente grande, cioè $\frac{a}{0} = \infty$.

Proposizione 2. La differenza dell'ascissa sta alla differenza dell' arco $::y:a$, cioè come l'ordinata al raggio.

Per ipotesi $dx:\sqrt{dx^2+dy^2}::m:n$; quindi $ndx=m\sqrt{dx^2+dx^2}$. Pongasi in vece di $dy^2$ il suo valore $\frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}$, ed il resto facciasi come nella propos. 1.; finalmente troveremo $ny=ma$, e $y:a::m:n$.

Corollario primo. Se $m=n$, sarà $y=a$, ed $x=o$, cioè nel centro la differenza dell'ascissa, che è $=o$, uguaglia la differenza dell'arco, vale a dire queste differenze non diventano mai uguali fra di loro.

Corollario 2. Dunque la ragione della differenza dell' arco alla differenza dell' ascissa cresce incominciando dall'estremità del quadrante fino all' altra estremità contigua al diametro, ed ivi hassi un massimo, cioè dove $y=o$, ed $x=a$.

Corollario 3. Essendo per la prop. 1. la differenza dell' ordinata alla differenza dell' arco $::x:a$, e per la presente, la differenza dell'ascissa alla differenza dell'arco $::y:a$; sarà la differenza dell' ordinata alla diffe-

renza dell' ascissa :: $x:y$, cioè reciprocamente come l' ascissa all' ordinata.

Corollario 4. Dunque $dy:dx::x:y$. Se $x=0$, come nel centro, $y:x=\infty$, e $dx:dy=\infty$; e perciò $dy=0$, ed ivi hassi un massimo.

Scolio. Egli è chiaro, che il metodo dei massimi, e dei minimi è soltanto un caso singolare del metodo, di cui mi servo; essendochè nel metodo dei massimi, e dei minimi $dx:dy=\infty$, vel $=\frac{1}{\infty}$, seu 0.

Proposizione 3. Determinare la grandezza delle coordinate, quando la differenza della saetta, e corda insieme sta alla differenza dell' arco corrispondente :: $m:n$.

Per ipotesi $-dx+2dy:2\sqrt{dx^2+dy^2}::m:n$; quindi $-ndx+2ndy=2m\sqrt{dx^2+dy^2}$. Si sostituiscano in vece di $dy$, e $dy^2$ i valori $-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ed $\frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}$, e fatte le opportune operazioni, troverassi $x=(+\sqrt{5n^2-4m^2}-4m)\frac{a}{5n}$, il quale valore di $x$ sostituito nell' equazione del circolo, abbiamo $y=+\frac{a}{5n}\sqrt{5n^2-3m^2+2m\sqrt{5n^2-4m^2}}$

Corollario 1. Facciasi $m = n$, che è il caso il più semplice, cioè qual sia la grandezza delle coordinate, ove la differenza della saetta, e corda insieme è uguale alla differenza dell'arco corrispondente, e troveremo $x = \frac{-3a}{5}$, $x = -a$, ed $y = +\frac{4a}{5}$, ed $y = 0$. Adunque quando le dette differenze sono fra di loro uguali, i lati del triangolo rettangolo terminato dalle coordinate, e dal raggio sono fra di loro : : 5 : 4 : 3, ossia la saetta, e corda insieme prese sono uguali al diametro.

Corollario 2. Dunque la differenza delle saetta, e corda insieme alla differenza dell' arco corrispondente non può avere maggior ragione di $\sqrt{5} : 2$. Imperciocchè nel radicale $\sqrt{5n^2 - 4m^2}$, se $4m^2 > 5n^2$, l'espressione è immaginaria (altronde un composto di reale, e di immaginario, resta immaginario); l'espressione sarà reale, se $4m^2 < 5n^2$; ed il radicale diventa $= 0$, se $4m^2 = 5n^2$; ora se pongasi $4m^2 = 5n^2$, abbiamo $m^2 : n^2 :: 5 : 4$, ed $m : n :: \sqrt{5} : 2$; dunque la ragion massima ec. perchè se $4m^2 < 5n^2$, $m^2 : n^2 < 5 : 4$, ed $m : n < \sqrt{5} : 2$.

Corollario 3. Dunque quando la ragione della differenza della saetta, e corda

insieme, alla differenza dell' arco è massima, i lati del triangolo rettangolo terminato dal raggio, e dalle coordinate, sono fra di loro : : $\sqrt{5} : 2 : 1$; e la saetta, e corda insieme prese sono uguali al raggio; di fatti la saetta è $= \frac{5a - 2a\sqrt{5}}{5}$, la corda è $= \frac{2a\sqrt{5}}{5}$, la cui somma $= a$ uguale al raggio.

Corollario 4. Dunque la ragione della differenza della saetta, e corda insieme, alla differenza dell' arco, cresce dal principio della saetta fino a tanto che la saetta, e corda insieme prese siano uguali al raggio, ed ivi la ragione è un massimo; da quel punto fino al punto, in cui la saetta, e corda insieme prese sono uguali al diametro, quella ragione diminuisce, ed ivi fassi ragione d' uguaglianza.

## *Nella Parabola.*

Propos. 4. La differenza dell' ordinata alla differenza dell' arco corrispondente sta come la sottonormale alla normale, cioè a dire : : $\sqrt{\frac{p^2}{4} + px} : \frac{p}{2}$.

Sia $y^2 = px$ l' equazione alla parabola; farà $y = \overline{px}^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{pdx^2}{2\sqrt{px}}$, $dy^2 = \frac{pdx^2}{4x}$; $dx = \frac{2ydy}{p}$, $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$.

Per ipotesi abbiamo $dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: m : n$; quindi $ndy = m\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e fatta la sostituzione, ed operazioni necessarie, avremo $\sqrt{\frac{p^2}{4} + px} : \frac{p}{2} :: n : m$ (ora $\sqrt{\frac{p}{2} + px}$ è la normale, e $\frac{p}{2}$ metà del parametro è la sottonormale); dunque ec.

Corollario 1. Se $m = n$, farà $\sqrt{\frac{p^2}{4} + px} = \frac{p}{2}$; dunque $x = 0$; quindi la differenza dell' ordinata non può mai essere uguale alla differenza dell' arco corrispondente.

Corollario 2. Poichè crescendo l'ascissa $x$, cresce $\sqrt{\frac{p^2}{4} + px}$, rimanendo $\frac{p}{2}$ costante; quindi la ragione della differenza dell' arco alla differenza dell' ordinata cresce all' infinito, e diventa un massimo quando $x$, od anche $y = \infty$.

Propof. 5. La differenza dell' afciffa alla differenza dall' arco corrifpondente fta come l' ordinata alla normale, cioè come $y$, offia $\sqrt{px} : \sqrt{\frac{p^2}{4} + px}$. Imperciocchè per ipotefi abbiamo $dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: m : n$, e fatte le opportune operazioni, finalmente avremo $\sqrt{\frac{p^2}{4} + px} : y :: n : m$.

Corollario 1. Se $m = n$, dovrebbe effere $\frac{p^2}{4} + px = px$, cioè a dire $p = 0$; il che non potendo effere, fino a tanto che $x$ è finita la differenza dell' arco fupera la differenza dell' afciffa, e quefte differenze diventano uguali a diftanza infinita.

Corol. 2. Se $x = \infty$, $\frac{p^2}{4}$ in confronto di $px$ fparifce; dunque quando $x = \infty$ la differenza dell'afciffa, e dell'arco fono tra di loro uguali.

Corollario 3. Dunque dalle propofizioni 4, e 5 la differenza dell' ordinata alla differenza dell' afciffa fta :: $\frac{p}{2} : y$, cioè come la fottonormale, o mezzo parametro all' ordinata.

Corollario 4. Dunque dal vertice infino al foco la differenza dell' ordinata fupera la differenza dell' afciffa; nel foco quefte differenze fono fra di loro uguali;

dal foco a distanza infinita la differenza dell' ordinata è minore della differenza dell' ascissa. Il che è bene da notarsi.

Corollario 4. Essendo $\frac{p}{2}$ quantità costante, è chiaro, che la ragione della differenza dell' ordinata alla differenza dell' ascissa si fa minore in infinito, ed in infinito aumentasi la ragione inversa; dunque la ragione della differenza dell'ascissa alla differenza dell' ordinata, può essere qualunque di maggior ineguaglianza.

Propos. 6. Determinare la ragione della somma delle differenze dell' ordinata, e dell' ascissa alla differenza dell' arco corrispondente.

Abbiamo per ipotesi $dx + 2dy : 2\sqrt{dx^2+dy^2} :: m : n$; quindi $ndx + 2ndy = 2m\sqrt{dx^2+dy^2}$, $ndx + \frac{npdx}{\sqrt{px}} = 2m\sqrt{\frac{dx^2+pdx^2}{4x}}$, $n\sqrt{px} + np = m\sqrt{4px+p^2}$, e fatte le rimanenti opportune operazioni, ed ordinata l' equazione

$$\left.\begin{array}{l} 16m^4 \\ -8m^2n^2 \\ +n^4 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} +8m^4p \\ -10m^2n^2p \\ -2n^4p \end{array}\right\} x \begin{array}{l} +m^4p^2 \\ -2m^2n^2p^2 = 0, \\ +n^4p^2 \end{array}$$

la quale risolta ne dà

$$x = \frac{5m^2n^2p + n^4p - 4m^4p + 2mn^2p\sqrt{5n^2 - 4m^2}}{16m^4 - 8m^2n^2 + n^4}$$

$$\text{ed } y = \frac{+p}{4m^2 - n^2} \times \ldots \ldots$$

$$\sqrt{5m^2 - n^2 + n^4 - 4m^4 + 2mn^2\sqrt{5n^2 - 4m^2}}.$$

Corollario 1. Se $m = n$, sarà $x = 0$, $x = \frac{4p}{9}$; ed $y = 0$, $y = \frac{2p}{3}$. Dunque senza far conto del vertice della parabola, la differenza dell' ordinata, e della corda insieme prese uguagliano la differenza dell' arco, quando l' ordinata è $= \frac{2}{3}$, e l'ascissa $= \frac{4}{9}$ del parametro, ed i lati del triangolo rettangolo terminato dall'ordinata, ascissa, e corda sono fra di loro $:: 2 : 3 : \sqrt{13}$.

Corollario 2°. Per via del radicale $\sqrt{5n^2 - 4m^2}$, anche nella parabola la ragion massima delle differenze dell' ascissa, ed ordinata insieme alla differenza dell' arco corrispondente sta $:: \sqrt{5} : 2$.

Corollario 3.° Dunque allorchè la detta differenza è un massimo, sta l' ascissa all' ordinata come $n^2 : 4m^2 - n^2$, cioè come il quadrato della differenza dell' arco al quadruplo quadrato della differenza dell'

ascissa, ed ordinata insieme diminuito della differenza quadrata dell'arco.

*Nell' Elisse.*

Propos. 7. Posta la differenza dell' ordinata alla differenza dell' arco : : $m : n$, troverassi $x = \frac{ma^2}{\sqrt{n^2b^2 + m^2c^2}}$ ($c$ è l'escentricità, $a^2b^2 - b^2x^2 = a^2y^2$ l' equazione all' ellisse prese le ascisse dal centro.

Per ipotesi abbiamo $dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} : : m : n$; quindi $ndy = m\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e fatta la sostituzione, e le necessarie operazioni, ed in vece di $a^2 - b^2$ sostituito $c^2$, troverassi $\sqrt{n^2b^2 + m^2c^2} : ma : : a : x$; dunque $x = \frac{ma^2}{\sqrt{n^2b^2 + m^2c^2}}$.

Corol. 1. Se sarà $m = n$, $\sqrt{n^2b^2 + m^2c^2}$ diventa $= ma$, ed $x = a$, vale a dire nel vertice dell' asse, sarà la differenza dell' ordinata uguale alla differenza dell' arco, cioè mai non saranno uguali.

Corollario 2. Se $x = o$, la ragione di $a : x$ è $= \infty$; dunque nel centro la ragione della differenza dell' arco alla differenza dell' arco ordinata sarà un massimo.

Prop. 8. Se la differenza dell'ascissa alla differenza dell'arco sarà $:: m : n$, sarà $x = \frac{a^2 \sqrt{n^2 - m^2}}{\sqrt{n^2a^2 - m^2c^2}}$.

Essendo per ipotesi $dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: m : n$, fatte le cose da farsi, troverassi $a : x :: \sqrt{n^2a^2 - m^2c^2} : a \sqrt{n^2 - m^2}$, ovvero

$$x = \frac{a^2 \sqrt{n^2 - m^2}}{\sqrt{n^2a^2 - m^2c^2}}.$$

Corollario 1°. Se $m = n$, il radicale $\sqrt{n^2 - m^2}$, diventa $= o$, cioè la differenza dell'ascissa nel centro è uguale alla differenza dell' arco, vale a dire non mai può essere uguale; essendovi niuna ascisa nel centro.

Corollario 2. Dunque la ragione della differenza dell' ascissa è un massimo allorquando $n : m :: c : a$, cioè quando sta la differenza dell' arco alla differenza dell' ascissa come l' escentricità al semi-asse maggiore, per via del radicale $\sqrt{n^2a^2 - m^2c^2}$.

Propos. 9. Determinare la ragione delle differenze dell' ascissa, ed ordinata insieme alla differenza dell' arco corrispondente, la quale pongasi $m : n$.

Per ipotesi $-dx + 2dy : 2\sqrt{dx^2 + dy^2} : : m : n$; quindi $-ndx + 2ndy = 2m\sqrt{dx^2+dy^2}$, e fatte le opportune operazioni, troverassi l' equazione di quarto grado.

$$\left.\begin{array}{l} n^4a^4 \\ +16^4b^4 \\ -8m^2n^2a^4 \\ +40m^2n^2a^2b^2 \\ -32m^2n^2b^4 \\ +16m^4a^4 \\ -32m^4a^2b^2 \\ +16m^4b^4 \\ +8n^4a^2b^2 \end{array}\right\} x^4 \left.\begin{array}{l} -2n^4a^6 \\ +16m^2n^2a^6 \\ -40m^2n^2a^4b^2 \\ +32m^4a^4b^2 \\ -8n^4a^4b^2 \\ -32m^4a^6 \end{array}\right\} x^2 \begin{array}{l} +n^4a^8 \\ -8m^2n^2a^8 = 0 \\ +16m^4a^8 \end{array}$$

la quale risolta nella maniera delle quadratiche, ne somministra

$$x = \sqrt{\frac{8\,mn^2a^4b^2\sqrt{5n^2 - 4m^2} - N}{D}}$$

($N$ è $=-n^4a^6+8m^2n^2a^6-20m^2n^2a^4b^2+16m^4a^4b^2-4n^4a^4b^2-16m^4a^6$, e $D=n^4a^4+16n^4b^4-8m^2n^2a^4+40n^2m^2a^2b^2-32n^2m^2b^4+16m^4a^4-32m^4a^2b^2+16m^4b^4+8n^4a^2b^2$)
il qual valore di $x$ ſoſtituito nell' equazione $a^2b^2-b^2x^2=a^2y^2$ dà

$$y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{8mn^2a^4b^2\sqrt{5n^2-4m^2}-N}{D}\right)}$$

Corollario 1.° Poſto $m=n$, ſarà $x=x$,

$$x=\frac{3a^2}{\sqrt{9a^2+16b^2}}\quad y=0,\ y=\frac{4b^2}{\sqrt{9a^2+16b^2}};$$

Dunque non avuto riguardo al principio, ed eſtremità dell' aſſe, le dette differenze ſono tra di loro uguali, dove l' aſciſſa ſta all' ordinata come $3a^2:4b^2$; ed i lati del triangolo rettangolo terminato dall' aſciſſa ordinata, ed ipotenuſa ſono :: $3a^2:4b^2:\sqrt{9a^4+16b^4}$.

Corollario 2. Dunque la detta aſciſſa è quarta proporzionale dopo $\sqrt{9a^2+16b^2}$, $3a$, ed $a$, e l' ordinata è terza proporzionale dopo $\sqrt{9a^2+16b^2}$, e $2b$.

Corollario 3. Dunque anche nell' ellisse la ragione massima della differenza dell' ascissa insieme, ed ordinata alla differenza dell' arco corrispondente è come $\sqrt{5} : 2$. per via di $\sqrt{5n^2 - 4m^2}$.

*Nell' Iperbola.*

Propos. 10. Posta la differenza dell' ordinata alla differenza dell' arco $:: m : n$ trovasi $x = \frac{ma^2}{\sqrt{m^2c^2 - n^2b^2}}$ ($c$ è l'escentricità, $a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2$ l' equazione all' iperbola scalena, prese le ascisse dal centro).

Abbiamo per ipotesi $dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: m : n$; quindi $ndy = m\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e fatto il restante da farsi, trovasi finalmente

$$x = \frac{ma^2}{\sqrt{m^2c^2 - n^2b^2}}.$$

Corollario 1.° Se $m = n$, abbiamo $\sqrt{m^2c^2 - n^2b^2} = ma$, ed $x = a$, cioè a dire sul principiare del diametro la differenza dell' ordinata è uguale alla differenza dell'

arco, o per dire meglio non può mai esſergli uguale.

Corollario 2. Se $x = o$, la ragion della differenza dell' arco alla differenza dell'ordinata è un maſſimo.

Corollario 3. Se $x = oo$, $\sqrt{m^2c^2 - n^2b^2} = o$; dunque $n : m :: c : b$, vale a dire la differenza dell' arco ſta alla differenza dell' ordinata come l' eſcentricità al ſemiaſſe conjugato.

Propoſ. 11. Se pongaſi la differenza dell' aſciſſa alla differenza dell' arco $:: m : n$, ſarà

$$x = \frac{a^2 \sqrt{n^2 - m^2}}{\sqrt{n^2a^2 - m^2c^2}}.$$

Imperciocchè eſſendo per ipoteſi $dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: m : n$, ſarà $ndx = m\sqrt{dx^2 + dy^2}$ e fatte le convenienti operazioni, ſarà $a : x :: \sqrt{n^2a^2 - m^2c^2} : a \sqrt{n^2 - m^2}$.

Corollario 1. Se $m = n$, per cagione del radicale $\sqrt{n^2 - m^2}$, ſarà $x = o$, cioè non mai la differenza dell' aſciſſa può uguagliare la differenza dell' arco.

Corollario 2. Pongasi $x = oo$, sarà $n : m :: c : a$, per essere $\sqrt{n^2a^2 - m^2c^2} = o$; dunque a distanza infinita la differenza dell' arco sta alla differenza dell' ascissa come l' escentricità al semiasse primo.

Corollario 3. Dunque se $x = oo$ la ragione della differenza dell' arco alla differenza dell' ascissa è la minima di tutte le possibili.

Corollario 4. Dunque a distanza infinità la differenza dell' ordinata alla differenza dell' ascissa sta come il semiasse conjugato al semiasse primo.

Proposizione 12. Determinare nell' iperbola la ragione della differenza dell' ordinata, ed ascissa insieme alla differenza dell' arco corrispondente.

Abbiamo per ipotesi $dx + 2dy : 2\sqrt{dx^2 + dy^2} :: m : n$; dunque $ndx + 2ndy = 2m\sqrt{dx^2 + dy^2}$

Fatta la sostituzione, ed operazioni convenienti, avrassi l' equazione di quarto grado.

$$\left.\begin{matrix} 16m^4a^4 \\ +32m^4a^2b^2 \\ -8m^2n^2a^4 \\ +16m^4b^4 \\ -40m^2n^2a^2b^2 \\ +n^4a^4 \\ -32m^2n^2b^4 \\ -8n^4a^2b^2 \\ +16n^4b^4 \end{matrix}\right\} x^4 \left.\begin{matrix} -32m^4a^6 \\ -32m^4a^4b^2 \\ +16m^2n^2a^6 \\ +40m^2n^2a^4b^2 \\ -2n^4a^6 \\ +8n^4a^4b^2 \end{matrix}\right\} x^2 \begin{matrix} +16m^4a^8 \\ -8m^2n^2a^8 \\ +n^4a^8 \end{matrix} = 0$$

la quale risolta ne dà

$$x = \sqrt{\frac{8mn^2a^4b^2\sqrt{5n^2-4m^2} - N}{D}}$$

($N$ è $= -16m^4a^6 - 16m^4a^4b^2 + 8m^2n^2a^6 + 20m^2n^2a^4b^2 - n^4a^6 + 4n^4a^4b^2$, e $D = 16m^4a^4 + 32m^4a^2b^2 - 8m^2n^2a^4 + 16m^4b^4 - 40m^2n^2a^2b^2 + n^4a^4 - 32m^2n^2b^4 - 8n^4a^2b^2 + 16n^4b^4$ )

il qual valore sostituito nell' equazione $a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2$ avremo

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{8mn^2a^4b^2\sqrt{5n^2-4m^2} - N}{D}\right) - b^2}$$

Corollario 1. Posto $m = n$, erit $x = a$,

$$x = \frac{3a^2}{\sqrt{9a^2-16b^2}}; \text{ ed } y = 0, \; y = \frac{4b^2}{\sqrt{9a^2-16b^2}}$$

Dunque prescindendo dal vertice della Iperbola, la differenza dell' ordinata, ed ascissa insieme uguaglia la differenza dell' arco dove la ascissa sta all' ordinata come $3a^2 : 4b^2$, vel $\frac{3a^2}{4} : b^2$.

Corollario 2. Dunque l' ascissa è quarta proporzionale dopo $\sqrt{9a^2 - 16b^2}$, $3a$, ed $a$; l' ordinata poi è terza proporzionale dopo le $\sqrt{9a^2 + 16b^2}$, è $2b$.

Corollario 3. Dunque anche nell' iperbola la ragion massima della differenza dell' ascissa, ed ordinata insieme alla differenza dell' arco sta $:: \sqrt{5} : 2$, per via del radicale $\sqrt{5n^2 - 4m^2}$.

Scolio. L' occasione di questo qualunque siasi saggio è stata la ricerca della quadratura del circolo mentre era ancor principiante nello studio delle Matematiche, ricerca, la quale sebbene abbia finora deluse tutte le industrie dei più sublimi ingegni, onde possa sembrar vana, non è stata però inutile attese le belle scoperte per essa cagionate.

Sanno i Geometri, che la periferia del circolo è maggiore del diametro preso tre

volte, e conſeguentemente che la ſemiperiferia è maggiore di tre raggi.

Altronde principiando dall' eſtremità del diametro perſino ad un certo limite ſi dimoſtra, che la ſaetta, e la corda, o ſottesa preſe inſieme ſono maggiori dell' arco corriſpondente. Dunque, io diceva, debbe trovarſi un punto nel raggio, in cui la ſaetta, e la corda inſieme ſiano uguali all' arco corriſpondente.

Dopo di che io meco così diſcorreva: ſe la ſaetta con la corda inſieme ſono uguali all' arco corriſpondente, anche le differenze ſaranno uguali, cioè la differenza della ſaetta, e corda inſieme ſaranno uguali alla differenza dell' arco corriſpondente.

Dunque $dx + 2dy = 2\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e principiando le aſciſſe dal vertice, dall' equazione del circolo $y^2 = 2ax - x^2$, avraſſi $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $dy^2 \frac{\overline{a - x}^2 . dx^2}{2ax - x^2}$; per la qual coſa ſoſtituiti queſti valori di $dy$, e di $dy^2$ nell' equazione $dx + 2dy = 2\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e diviſa l' equazione per $dx$, avraſſi $\sqrt{2ax - x^2} = 2x$, $2ax^2 = 4x^2$,

$2a = 5x$, ed $x = \frac{2a}{5}$, e ſoſtituito $\frac{2a}{5}$ in vece di $x$ nell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$, ſarà $y = \frac{4a}{5}$, appunto come nel corollario primo della terza propoſizione, principiando ivi le aſciſſe dal centro, e quì dal vertice.

Ora quando $x = \frac{2a}{5}$, ed $y = \frac{4a}{5}$ l' arco corriſpondente non è uguale alla ſaetta, e corda preſe inſieme; dunque non ſi può dire, che poſte le quantità finite, anche tutte variabili tra di loro uguali, le loro differenze ſieno uguali.

*IMPRIMATUR.*

F. Dominicus SARRA S. Theol. Mag., & Provic. S. Off. Taurini.

CAUDA pro CL. TEPPATI AA. LL. P.

V. Di S. RAFFAELE.

